ÁLGEBRA 3

Segundo cuatrimestre — 2014

Segundo parcial

APELLIDO Y NOMBRE: ....

L.U.: .... HOJAS: ....

---

1. Sean $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ y $\alpha = 1 + \sqrt[3]{2}$. Muestre que para cada $n > 1$ el polinomio $X^n - \alpha$ no tiene raíces en E.

2. Sea p un número primo y sea $n \geq 2$.

(a) Si $p \equiv 1 \mod n$, entonces para cada $a \in \mathbb{F}_p$ el polinomio $X^n - a$ se factoriza como producto de factores lineales en $\mathbb{F}_{p^n}[X]$.

(b) Sea $r \geq 1$ y supongamos que $p \nmid n$. El polinomio $\bar{\Phi}_n$ se descompone como producto de factores lineales en $\mathbb{F}_{p^r}[X]$ si y solamente si $p^r \equiv 1 \mod n$.

3. Sea p un número primo, $r \geq 1$ y $\zeta \in \mathbb{C}$ una raíz p^r-ésima primitiva de la unidad. Calcule $N_{\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}}(1 - \zeta)$.

4. Sea $k \in \mathbb{Z}$ y $a = k^2 + k + 7$. Determine el grupo de Galois de $X^3 - aX + a$ sobre $\mathbb{Q}$.

5. Si p es un primo impar, para cada $n \in \mathbb{N}$ el polinomio ciclotómico Φ_n es irreducible sobre $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{2})$. Esto no es cierto si $p = 2$.