Álgebra 3

Segundo cuatrimestre — 2014

Primer parcial

Apellido y nombre: ....
L.U.: .... Hojas: ....

---

1. (a) Si E es un subcuerpo de $\mathbb{C}$ tal que $E/\mathbb{Q}$ es una extensión galoisiana finita y $E \not\subseteq \mathbb{R}$, entonces $[E : E \cap \mathbb{R}] = 2$.

(b) Si además la extensión $E/\mathbb{Q}$ es cíclica de grado n, $\alpha \in E \setminus \mathbb{R}$ y d es el grado del polinomio minimal de α sobre $\mathbb{Q}$, entonces d divide a n y n/d es impar.

2. Si K es un cuerpo de característica positiva p, entonces $\bigcap_{n\geq 1} K^{p^n}$ es un subcuerpo de K y es el más grande subcuerpo de K que es perfecto.

3. Sea K un cuerpo y $f \in K[X]$ un polinomio separable de grado n tal que si E es el cuerpo de descomposición de f sobre K es $\mathrm{Gal}(E/K) \cong S_n$. Si $\alpha \in E$ es una raíz de f, entonces la extensión $K(\alpha)/K$ no tiene subextensiones propias no triviales. ¿Es $K(\alpha)/K$ una extensión galoisiana?

4. Si $f(X) = X^4 - 2aX^2 + b \in \mathbb{Q}[X]$ es irreducible y $b \in \mathbb{Q}^2$, determine el grupo de Galois del cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$ y exhiba sus subxtensiones cuadráticas.

5. Sea K un cuerpo de característica p positiva y sea $a \in K$ un elemento que no es de la forma $b^p - b$ para ningún $b \in K$. Muestre que el polinomio $X^p - X - a$ es irreducible en $K[X]$ y determine su grupo de Galois sobre K.