Práctica 5

1. Sean E/K y L/K dos extensiones. Probar que si E/K y L/K son isomorfas entonces sus grupos de Galois son isomorfos. ¿Vale la recíproca?

2. Caracterizar los grupos de Galois de los cuerpos de descomposición de los polinomios (a), (d) y (e) del Ejercicio 2 de la Práctica 3.

3. Sea $E = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$.

   a) Calcular $[E : \mathbb{Q}]$. ¿Es $E/\mathbb{Q}$ una extensión normal?

   b) Caracterizar $G(E/\mathbb{Q})$ y hallar las subextensiones de grado 2 de $E/\mathbb{Q}$.

4. Determinar todas las subextensiones del cuerpo de descomposición del polinomio $(X^2-2)(X^2-3)(X^2-5)$ sobre $\mathbb{Q}$.

5. Determinar todas las subextensiones de grado 2 del cuerpo de descomposición del polinomio X^4-2X^2-1 sobre $\mathbb{Q}$.

6. Sea K un cuerpo de característica distinta de 2 y sean $\alpha, \beta \in K$ tales que α, β y $\alpha\beta$ no son cuadrados en K. Si $a^2 = \alpha$ y $b^2 = \beta$, caracterizar $G(K(a,b)/K)$.

7. Sea K un cuerpo de característica distinta de 2.

   a) Sea E/K una extensión galoisiana tal que $G(E/K) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Probar que $E = K(a,b)$ con a^2, $b^2 \in K$.

   b) Generalizar el resultado del ítem a) para $G(E/K) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2$ (n sumandos).

8. a) Sea ξ_n una raíz n-ésima primitiva de la unidad y sea $\phi_n = \boldsymbol{m}(\xi_n, \mathbb{Q})$. Sea $K/\mathbb{Q}$ una extensión tal que ϕ_n es irreducible en $K[X]$. Probar que $K(\xi_n)/K$ es una extensión galoisiana de grado $\varphi(n)$ y que $G(K(\xi_n)/K) \simeq \mathcal{U}_n$.

   b) Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Caracterizar $G(K(\xi_{20})/K)$.

9. a) Probar que $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{11})/\mathbb{Q}$ es la única subextensión de grado 5 de $\mathbb{Q}(\xi_{11})/\mathbb{Q}$.

   b) Probar que $\mathbb{Q}(\xi_{11})/\mathbb{Q}$ tiene una única subextensión de grado 2.

10. Sea E/K una extensión galoisiana de grado 15. Probar que E/K tiene sólo dos subextensiones propias, calcular sus grados y ver que dichas subextensiones resultan galoisianas.

11. Sea E/K una extensión galoisiana de grado 45. Probar que si F/K es una subextensión de grado 3 de E/K, entonces es galoisiana.

12. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea E/K una extensión galoisiana de grado $p^n s$ con $n \in \mathbb{N}$ y $(p,s) = 1$. Probar que:

    a) E/K tiene subextensiones de grado s, y dos de ellas son isomorfas.

b) Si $p > s$ hay una única subextensión de grado s que, además, resulta galoisiana.

Definición: Una extensión de cuerpos se dice *abeliana* si es de Galois con grupo de Galois abeliano.

13. (a) Dada una extensión galoisiana E/K, probar que existe una única subextensión abeliana máxima (es decir, que contiene a todas las subextensiones abelianas).
    (b) Determinarla en el caso en que E es el cuerpo de descomposición del polinomio $X^4 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$.

14. (a) Sean E/K y F/K dos subextensiones de grado finito de una extensión L/K. Probar que E/K y F/K son abelianas si y sólo si EF/K es abeliana.
    (b) Exhibir dos subextensiones de grado finito $E/\mathbb{Q}$ y $F/\mathbb{Q}$ de $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ tales que $EF/\mathbb{Q}$ sea galoisiana pero ni $E/\mathbb{Q}$ ni $F/\mathbb{Q}$ lo sean.

15. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio irreducible de grado mayor o igual que 2 con la propiedad de tener exactamente una raíz real y sea $E/\mathbb{Q}$ un cuerpo de descomposición de f. Probar que $G(E/\mathbb{Q})$ no es abeliano.

16. Sea $E = \mathbb{C}(X)$. Consideremos los automorfismos f y g de E definidos por $g(X) = X^{-1}$ y $f(X) = wX$, donde w es una raíz n-ésima primitiva de 1. Probar que:

    a) $f^n = g^2 = id_E$ y $fg = gf^{-1}$.
    b) El subgrupo G generado por f y g es isomorfo a D_n.
    c) $E^G = \mathbb{C}(X^n + X^{-n})$.

17. Sea K un cuerpo y sea $E = K(X)$ con X trascendente sobre K. Probar que:

    (a) Si $f = P/Q$ con $P, Q \in K[X]$ coprimos y no ambos constantes, entonces
    $$[E : K(f)] = \max\{\deg P, \deg Q\}.$$
    (b) $\operatorname{Aut}(E/K) = \left\{\varphi : \varphi(X) = \frac{aX+b}{cX+d} \text{ con } \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0\right\} = PGL(2, K).$

18. Sea K un cuerpo de q elementos y sea $E = K(X)$. Probar que:

    a) $|\operatorname{Aut}(E/K)| = q^3 - q$
    b) $\operatorname{Aut}(E/K)$ está generado por los automorfismos f_a, g_b y h definidos por
    $$f_a(X) = aX, \quad a \in K - \{0\}; \qquad g_b(X) = X + b, \quad b \in K; \qquad h(X) = X^{-1}.$$
    c) $E^{\operatorname{Aut}(E/K)} = K(Y)$, donde $Y = \dfrac{(X^{q^2} - X)^{q+1}}{(X^q - X)^{q^2+1}}$.