

Práctica 7 - Segunda parte

Reducción módulo p y teorema de Dedekind

Nota: En esta práctica trabajamos con polinomios con coeficientes enteros. Dado un polinomio separable $f \in \mathbb{Z}[X]$ de grado n , denotamos G_f al grupo de Galois de f sobre \mathbb{Q} , el cual identificamos con un subgrupo de \mathbb{S}_n . Para cada primo p , la reducción de f módulo p es la imagen de f por el morfismo canónico $\mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{F}_p[X]$, y la denotamos f_p .

1. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio mónico de grado n , y sea c un número entero divisible por todos los denominadores en los coeficientes de f . Probar que el polinomio $g(x) = c^n f\left(\frac{x}{c}\right)$ es mónico, tiene coeficientes enteros, y $\text{Desc}(g|\mathbb{Q}) = \text{Desc}(f|\mathbb{Q})$.
2. Sea G un subgrupo transitivo de \mathbb{S}_n que contiene una trasposición y un $(n-1)$ -ciclo. Probar que $G = \mathbb{S}_n$.
3. Para cada uno de los siguientes polinomios f , probar que $G_f = \mathbb{S}_n$, con $n = \deg(f)$:
 - (a) $X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 5X^2 - 2X + 3$;
 - (b) $X^6 - 12X^4 + 15X^3 - 6X^2 + 15X + 12$;
 - (c) $X^5 + 25X^4 + 10X^3 + 10X^2 + 10X + 15$.
4. Sea f el polinomio $X^5 - X^4 + 2X^2 - 2$. Factorizando f módulo 3 y módulo 7, probar que G_f contiene una trasposición y un 4-ciclo. ¿Es $G_f = \mathbb{S}_5$?
5. Sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ mónico e irreducible de grado 4 tal que $G_f \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Probar que para todo primo p , el polinomio f_p es reducible en $\mathbb{F}_p[X]$.
6. Sea n un entero impar tal que $p = n+2$ es primo, y sea $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio mónico e irreducible de grado p . Supongamos que para un cierto primo p' , el polinomio $f_{p'}$ se factoriza en $\mathbb{F}_{p'}[X]$ como producto de dos polinomios irreducibles cuyos grados son 2 y n . Probar que $G_f = \mathbb{S}_p$.