

Práctica 8

Extensiones trascendentes

1. Sea K un cuerpo y sean α algebraico sobre K y t trascendente sobre K . Probar que α es algebraico sobre $K(t)$ y que $\mathbf{m}(\alpha, K) = \mathbf{m}(\alpha, K(t))$.

2. Sean L_1 y L_2 dos subextensiones de una extensión E/K . Probar que

$$\text{trdeg}(L_1 L_2 / K) \leq \text{trdeg}(L_1 / K) + \text{trdeg}(L_2 / K).$$

3. Sea E/K una extensión con E algebraicamente cerrado. Sea $\varphi : E/K \rightarrow E/K$ un morfismo de extensiones. Probar que si $\text{trdeg}(E/K) < \infty$ entonces φ es un isomorfismo. Mostrar que esto no vale si $\text{trdeg}(E/K) = \infty$.
4. Sea t trascendente sobre \mathbb{C} y sea K la clausura algebraica de $\mathbb{C}(t)$. Probar que $K \simeq \mathbb{C}$.

Anillos locales

5. Sea R un anillo. Probar que son equivalentes:

- (a) El conjunto de elementos no inversibles de R forma un ideal.
- (b) R es un anillo local, es decir, tiene un único ideal maximal \mathfrak{m} .

6. Probar que un anillo local R no contiene idempotentes distintos de 1 y 0. (Un *idempotente* es un elemento $e \in R$ tal que $e^2 = e$.)
7. Sean (R, \mathfrak{m}) un anillo local y M un R -módulo finitamente generado. Supongamos que $x_1, \dots, x_k \in M$ son tales que $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ genera $M/\mathfrak{m}M$ como R/\mathfrak{m} -espacio vectorial. Probar que x_1, \dots, x_k generan M como R -módulo. (Sugerencia: usar Nakayama.)