Práctica 2

Nota: $\boldsymbol{m}(\alpha, K)$ denota el polinomio minimal de α sobre el cuerpo K y ξ_n denota una raíz enésima primitiva de la unidad.

1. Sean E/K una extensión y $\alpha \in E$ algebraico sobre K. Dada una subextensión F/K de E/K, probar que $\boldsymbol{m}(\alpha, F)$ divide a $\boldsymbol{m}(\alpha, K)$. Dar ejemplos con $\boldsymbol{m}(\alpha, F) = \boldsymbol{m}(\alpha, K)$ y con $\boldsymbol{m}(\alpha, F) \neq \boldsymbol{m}(\alpha, K)$.

2. Calcular los siguientes polinomios minimales:

   (a) $\boldsymbol{m}(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q})$ (b) $\boldsymbol{m}\big(\sqrt{2-\sqrt{3}}, \mathbb{Q}\big)$ (c) $\boldsymbol{m}(\sqrt[4]{-1}, \mathbb{Q}[i])$
   (d) $\boldsymbol{m}(\sqrt[4]{2}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}\,])$ (e) $\boldsymbol{m}(\sqrt[4]{-1}, \mathbb{Q})$ (f) $\boldsymbol{m}(w, \mathbb{R})$ con $w \in \mathbb{C}$

3. Calcular:

   (a) $\big[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}\,) : \mathbb{Q}(\sqrt{2}\,)\big]$ (b) $\big[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) : \mathbb{Q}\big]$ (c) $\big[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{7}\,) : \mathbb{Q}\big]$

4. (a) Calcular $\big[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}\,) : \mathbb{Q}\big]$ y $\big[\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,) : \mathbb{Q}\big]$. Deducir que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}\,) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,)$.
   (b) Hallar $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}\,)$. Calcular $\boldsymbol{m}(\alpha, \mathbb{Q})$.

5. Probar que $\mathbb{Q}\big(\sqrt{2-\sqrt{3}}\,\big) = \mathbb{Q}\big(\sqrt{2+\sqrt{3}}\,\big)$. Calcular $\Big[\mathbb{Q}\big(\sqrt{2-\sqrt{3}}\,\big) : \mathbb{Q}\Big]$.

6. Sea K un cuerpo y sea E/K una extensión finita. Para cada $\alpha \in E$ definimos $L_\alpha : E \to E$ como el endomorfismo K-lineal dado por $L_\alpha(x) = \alpha x$. Probar que $\boldsymbol{m}(\alpha, K)$ es el polinomio minimal del endomorfismo L_α. ¿Para cuáles $\alpha \in E$ vale que $\boldsymbol{m}(\alpha, K)$ es el polinomio característico de L_α?

7. Sea E/K una extensión. Probar que E/K es algebraica si y sólo si todo anillo A con $K \subseteq A \subseteq E$ es un cuerpo.

8. Sea $a \in \mathbb{Z}[i]$ irreducible y sea K el cuerpo primo de $\mathbb{Z}[i]/(a)$. Calcular $[\mathbb{Z}[i]/(a) : K]$.

9. Sean L/K y M/K dos subextensiones de grado finito de una extensión F/K. Probar las siguientes afirmaciones:

   (a) Si $\mathrm{mcd}([L : K], [M : K]) = 1$ entonces $[LM : K] = [L : K]\,[M : K]$.
   (b) Si $[LM : K] = [L : K]\,[M : K]$ entonces $L \cap M = K$. ¿Vale la recíproca?

10. Mostrar que el polinomio $X^5 + 6X^3 + 15X^2 + 3$ es irreducible en $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}\,)[X]$.

11. Sea F/K una extensión finita de cuerpos. Probar que:

    (a) Si $[F, K]$ es impar y $F = K(u)$ entonces $F = K(u^2)$.
    (b) Si $[F, K]$ es primo entonces F/K no tiene cuerpos intermedios.

12. (a) Sea K un cuerpo de característica $\neq 2$. Caracterizar las extensiones cuadráticas (i.e. de grado 2) de K.
    (b) Sea $f = X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ y sea α una raíz de f en una clausura algebraica de $\mathbb{F}_2$. Probar que no existe $\beta \in \mathbb{F}_2(\alpha)$ tal que $\boldsymbol{m}(\beta, \mathbb{F}_2) = X^2 + c$ para algún $c \in \mathbb{F}_2$.

13. Dado $b \in \mathbb{Q}$, sea α_b una raíz del polinomio $X^2 + bX + b^2$. Describir las posibles extensiones $\mathbb{Q}(\alpha_b)$ de $\mathbb{Q}$ y determinar $[\mathbb{Q}(\alpha_b) : \mathbb{Q}]$.

14. (a) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcular $\boldsymbol{m}(\xi_p, \mathbb{Q})$ y deducir $[\mathbb{Q}(\xi_p) : \mathbb{Q}]$.
    (b) Calcular $\boldsymbol{m}(\xi_6, \mathbb{Q})$.
    (c) Probar que $\boldsymbol{m}(\xi_n, \mathbb{Q}) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$ si y sólo si n es primo.

15. Probar que $\boldsymbol{m}(\xi_5 + \xi_5^{-1}, \mathbb{Q}) = X^2 + X - 1$. Deducir que $\mathbb{Q}(\xi_5)$ admite una subextensión cuadrática y caracterizarla.

16. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y sea $a \notin \mathbb{Q}^p$.
    (a) Probar que $\boldsymbol{m}(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q}) = X^p - a$.
    (b) Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ el mínimo cuerpo que contiene a todas las raíces de $\boldsymbol{m}(\sqrt[p]{a}, \mathbb{Q})$. Caracterizar K y calcular $[K : \mathbb{Q}]$ y $[K : \mathbb{Q}(\sqrt[p]{a}\,)]$.

17. Se define $\mathbb{Q}_{\text{alg}} = \{x \in \mathbb{C} : x \text{ es algebraico sobre } \mathbb{Q}\}$. Probar que $\mathbb{Q}_{\text{alg}}/\mathbb{Q}$ es una extensión algebraica que no es finita.

18. Sea $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una numeración de los primos positivos.
    (a) Calcular $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}\,\right) : \mathbb{Q}\right]$. Calcular la cantidad de subextensiones de grado 2 de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}\,\right)/\mathbb{Q}$.
    (b) Hallar $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{p_i}\,\right)_{i\in\mathbb{N}} : \mathbb{Q}\right]$.
    (c) ¿Existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{p_i}\,\right)_{i\in\mathbb{N}} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$?
    (d) Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado tal que $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$. Calcular $[K : \mathbb{Q}]$.

19. Sea E/K una extensión algebraica de grado infinito. Probar que existen subextensiones de E/K de grado finito arbitrariamente grande.

20. (a) Probar que un cuerpo algebraicamente cerrado es infinito.
    (b) Sea E/K una extensión algebraica. Calcular el cardinal de E en función del cardinal de K.
    (c) Deducir que para todo cardinal infinito γ existe un cuerpo algebraicamente cerrado de cardinal γ.
    (d) Probar que hay no numerables elementos trascendentes en $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

21. Sea K un cuerpo.
    (a) Sea t trascendente sobre K. Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular $\boldsymbol{m}(t, K(t^n))$. Deducir $[K(t) : K(t^n)]$.

(b) Sea $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ una familia algebraicamente independiente sobre K y sean $e_1, e_2, \ldots, e_n$ números naturales. Calcular $[K(t_1, \ldots, t_n) : K(t_1^{e_1}, \ldots, t_n^{e_n})]$.

22. Sea K un cuerpo y sea $f \in K[X] - K$. Probar que $[K(X) : K(f)] = \mathrm{gr}(f)$.

23. Sea E/K una extensión de cuerpos y sean $x, y \in E$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

    (a) Si x e y son trascendentes sobre K entonces $x+y$ y xy no son ambos algebraicos sobre K.

    (b) Si x es trascendente sobre K e y es algebraico sobre K entonces $x+y$ es trascendente sobre K.

    (c) Si x es trascendente sobre K e y es algebraico sobre K entonces xy es trascendente sobre K.

    (d) Si x es trascendente sobre K e y es trascendente sobre $K(x)$ entonces $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K.

    (e) Si x e y son trascendentes sobre K entonces $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K.

24. (a) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Probar que hay sólo dos morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \to \mathbb{C}$ y que en cada caso $f\big(\mathbb{Q}(\sqrt{d})\big) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ (de hecho, vale la igualdad).

    (b) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cubos.

      (i) Probar que hay sólo tres morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{d}) \to \mathbb{C}$ pero, en general, $f\big(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{d})\big) \nsubseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{d})$.

      (ii) Considerar $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{d}, \xi_3)$. ¿Qué sucede en este caso?