Práctica 3

1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
   (a) Todo polinomio no constante se factoriza linealmente sobre algún cuerpo.
   (b) El cuerpo de descomposición de un polinomio es único, salvo isomorfismos.
   (c) Toda extensión finita es el cuerpo de descomposición de algún polinomio.
   (d) Sean $K \subseteq L \subseteq E$. Si E es el cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in K[X]$ entonces E es el cuerpo de descomposición de f visto como polinomio en $L[X]$.

2. Exhibir cuerpos de descomposición, determinando su grado y sistemas de generadores, para cada uno de los siguientes polinomios sobre los cuerpos indicados:
   (a) $X^p - a$, sobre $\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo y $a \in \mathbb{N} - \mathbb{N}^p$.
   (b) $X^3 - 10$, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,)$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$.
   (c) $X^4 - 5$, sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5}\,)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-5}\,)$ y $\mathbb{Q}(i)$.
   (d) $X^4 + 2$, sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}(i)$.
   (e) $\prod_{i=1}^{n} \left(X^2 - p_i\right)$, sobre $\mathbb{Q}$, con $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos.
   (f) $X^3 - 2$, sobre $\mathbb{F}_7$.
   (g) $(X^3 - 2)(X^3 - 3)(X^2 - 2)$, sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$ y sobre $\mathbb{F}_5$.
   (h) $X^n - t$, sobre $\mathbb{C}(t)$, con t trascendente sobre $\mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$.
   (i) $X^4 - t$, sobre $\mathbb{R}(t)$, con t trascendente sobre $\mathbb{R}$.

3. Caracterizar los cuerpos de descomposición de los polinomios $X^3 + X^2 + X + 2$ y $X^3 + 2X + 1$ sobre $\mathbb{F}_3$. Probar que son isomorfos como extensiones de $\mathbb{F}_3$.

4. Calcular los cuerpos de descomposición de los polinomios irreducibles de grado 2 sobre $\mathbb{F}_5$. ¿Son isomorfos entre ellos?

5. Sea $E/\mathbb{Q}$ una extensión que es cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grado n. Probar que $[E : \mathbb{Q}] \mid n!$. Dar ejemplos de extensiones donde se cumpla la igualdad, y donde no se cumpla.

6. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
   (a) Toda extensión de grado finito es normal.
   (b) Toda extensión de grado finito tiene una clausura normal de grado finito.
   (c) Toda extensión de un cuerpo de característica cero es normal.
   (d) Todo K-morfismo $f : L/K \to L/K$ es un K-automorfismo.

(e) Si L/K es una extensión algebraica, todo K-morfismo $f : L/K \to L/K$ es un K-automorfismo.

7. Sea K un cuerpo de característica $p \neq 0$.
   (a) Probar que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f : K \to K$ definido por $f(x) = x^{p^n}$ es un $\mathbb{F}_p$-morfismo de cuerpos.
   (b) Probar que si K es un cuerpo finito de característica p, entonces el morfismo f definido en (a) es un automorfismo. Dar ejemplos de K infinito con esta propiedad.

8. Sea K el cuerpo de descomposición de $X^{p^n} - X$ sobre $\mathbb{F}_p$. Probar que $[K : \mathbb{F}_p] = n$.

9. Determinar el cuerpo de descomposición de $X^4 - 10X^2 + 5$ sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_3$ y $\mathbb{F}_7$.

10. Sea E/K un cuerpo de descomposición de $f \in K[X]$, $f \neq 0$, y sea F/K una subextensión de E/K. Probar que todo morfismo de F/K en E/K puede ser extendido a un automorfismo de E/K.

11. Determinar cuáles de las siguientes extensiones E/K son normales. En cada caso calcular $\mathrm{Hom}(E/K, C/K)$, donde C es una clausura algebraica de K.
    (a) $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5}\,)/\mathbb{Q}$.
    (b) $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5}, \sqrt{5}\,)/\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5}\,)$.
    (c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,, \sqrt[3]{3}\,)/\mathbb{Q}$.
    (d) $\mathbb{Q}(\xi_p)/\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{N}$ primo.
    (e) $\mathbb{F}_3(a)/\mathbb{F}_3$, con a raíz de $X^3 + X^2 + 2X + 1$.

12. Sean K un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y t trascendente sobre K. Probar que $K(t)/K(t^n)$ es normal si y sólo si el polinomio $X^n - 1$ se factoriza linealmente en $K[X]$.

13. (a) Probar que $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}\,)/\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,)$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,)/\mathbb{Q}$ son normales, pero $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}\,)/\mathbb{Q}$ no lo es.
    (b) Exhibir extensiones normales con subextensiones no normales.

14. Sean E/K y F/K subextensiones normales de una extensión H/K. Probar que EF/K y $E \cap F/K$ son normales.

15. Probar que toda extensión E/K generada por elementos de grado 2 es normal. ¿Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ se cumple que toda extensión de grado n sobre $\mathbb{Q}$ es normal?

16. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo, $p \neq 2$. Sea $K = \mathbb{F}_p(u, v)$, con $\{u, v\}$ algebraicamente independientes sobre $\mathbb{F}_p$ y sea α una raíz de $f = X^{2p} - uv\, X^p + v$ en una clausura algebraica C/K de K.
    (a) Probar que $K(\alpha)/K$ no es normal.
    (b) Sea E/K un cuerpo de descomposición de f. Hallar $[E : K]$.

17. (a) Sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en $K[X]$ se factoriza linealmente en $E[X]$. Probar que E es algebraicamente cerrado.
    (b) Sea K un cuerpo infinito y sea E/K una extensión algebraica tal que todo polinomio no constante en $K[X]$ tiene una raíz en E. Probar que E es algebraicamente cerrado.