Iam quoniam quaeque permutatio ex p rebus constat, patet cuivis $p-1$ similes adinveniri posse, si ea res quae prima fuerat, ad secundum, tertium etc. locum promoveatur. Quarum si nullae identicae esse possunt manifestum est, omnium permutationum numerum per p divisibilem evadere, quippe qui p vicibus maior sit quam numerus omnium permutationum dissimilium. Supponamus igitur duas permutationes

$$PQ\ldots TV\ldots YZ; \qquad V\ldots YZPQ\ldots T$$

quarum altera ex altera per terminorum promotionem orta sit, identicas esse sive $P=V$ etc. Sit terminus P qui in priori est primus, $n+1^{\text{tus}}$ in posteriori. Erit igitur in serie posteriori terminus $n+1^{\text{tus}}$ aequalis primo, $n+2^{\text{tus}}$ secundo etc. unde $2n+1^{\text{tus}}$ rursus primo aequalis evadet, eademque ratione $3n+1^{\text{tus}}$ etc.; generaliterque terminus $kn+m^{\text{tus}}$ m^{to} (ubi quando $kn+m$ ipsum p superat, aut series $V\ldots YZPQ\ldots T$ semper ab initio repeti concipienda est, aut a $kn+m$ multiplum ipsius p proxime minus rescindendum). Quamobrem si k ita determinatur, ut fiat $kn\equiv 1 \pmod{p}$, quod fieri potest quia p primus, sequitur generaliter terminum m^{tum} $m+1^{\text{to}}$ aequalem esse, sive quemvis terminum sequenti, *i. e.* omnes terminos aequales esse contra hypothesin.

42.

Si coefficientes $A, B, C \ldots . N; a, b, c \ldots . n$ *duarum functionum formae*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots . . + N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (P)$$
$$x^\mu + a\,x^{\mu-1} + b\,x^{\mu-2} + c\,x^{\mu-3} \ldots . . + n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (Q)$$

omnes sunt rationales, neque vero omnes integri, productumque ex (P) *et* (Q)

$$= x^{m+\mu} + \mathfrak{A}\,x^{m+\mu-1} + \mathfrak{B}\,x^{m+\mu-2} + etc. + \mathfrak{Z}$$

omnes coefficientes $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \ldots . \mathfrak{Z}$ *integri esse nequeunt.*

Demonstr. Exprimantur omnes fractiones in coefficientibus A, B etc. a, b etc. per numeros quam minimos, eligaturque ad libitum numerus primus p, qui aliquem aut plures ex denominatoribus harum fractionum metiatur. Ponamus, id quod licet, p metiri denominatorem alicuius coefficientis fracti in (P), patetque si (Q) per p dividatur, etiam in $\frac{(Q)}{p}$ dari ad minimum unum coefficientem fractum cuius denominator implicet factorem p (puta coefficientem primum $\frac{1}{p}$).

Iam facile perspicitur, in (P) datum iri terminum unum, fractum, cuius denominator involvat *plures* dimensiones ipsius p quam denominatores omnium similium praecedentium, et *non pauciores* quam denominatores omnium sequentium; sit hic terminus $= Gx^g$, et multitudo dimensionum ipsius p in denominatore ipsius G, $= t$. Similis terminus dabitur in $\frac{(Q)}{p}$ qui sit $= \Gamma x^\gamma$ et multitudo dimensionum ipsius p in denominatore ipsius Γ, $= \tau$. Manifesto hic erit $t + \tau$ ad minimum $= 2$. His ita praeparatis, terminus $x^{g+\gamma}$ producti ex (P) et (Q) coefficientem habebit fractum, cuius denominator $t + \tau - 1$ dimensiones ipsius p involvet, id quod ita demonstratur.

Sint termini qui in (P) terminum Gx^g praecedunt, $'Gx^{g+1}$, $''Gx^{g+2}$ etc. sequentes vero $G'x^{g-1}$, $G''x^{g-2}$ etc.; similiterque in $\frac{(Q)}{p}$ praecedant terminum Γx^γ termini $'\Gamma x^{\gamma+1}$, $''\Gamma x^{\gamma+2}$ etc. sequantur autem termini $\Gamma' x^{\gamma-1}$, $\Gamma'' x^{\gamma-2}$ etc. Tum constat in producto ex (P), $\frac{(Q)}{p}$ coefficientem termini $x^{g+\gamma}$ fore

$$\begin{aligned} = G\Gamma + {}'G\Gamma' + {}''G\Gamma'' + \text{etc.} \\ + {}'\Gamma G' + {}''\Gamma G'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

Pars $G\Gamma$ erit fractio quae si per numeros quam minimos exprimitur in denominatore $t + \tau$ dimensiones ipsius p involvit, reliquae autem partes si sunt fractae, in denominatore pauciores dimensiones numeri p implicabunt, quoniam omnes sunt producta e binis factoribus quorum alter non plures quam t, alter vero pauciores quam τ dimensiones ipsius p implicat; vel alter non plures quam τ, alterque pauciores quam t. Hinc $G\Gamma$ erit formae $\frac{e}{fp^{t+\tau}}$ reliquarum vero summa formae $\frac{e'}{f'p^{t+\tau-\delta}}$ ubi δ positivus et e, f, f' a factore p liberi: quare omnium summa erit $= \frac{ef' + e'fp^\delta}{ff'p^{t+\tau}}$ cuius numerator per p non divisibilis, adeoque denominator per nullam reductionem pauciores dimensiones quam $t + \tau$ obtinere potest. Hinc coefficiens termini $x^{g+\gamma}$ in producto ex (P), (Q) erit

$$= \frac{ef' + e'fp^\delta}{ff'p^{t+\tau-1}}$$

i. e. fractio cuius denominator $t + \tau - 1$ dimensiones ipsius p implicat. *Q. E. D.*