Taller de Cálculo Avanzado

Primer Cuatrimestre — 2013

Recuperatorio del prefinal

Apellido y nombre: ....

Carrera: .... L.U.: .... Hojas: ....

1	2	3	4	5	6	
7	8	9	10	11	12	

Muestre que los siguientes enunciados son verdaderos:

1. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua y $x_0\in\mathbb{R}$, entonces existe el límite $\lim_{x\to x_0}|f(x)|$.

2. Sean $K\subset\mathbb{R}$ un conjunto compacto y $f:K\to\mathbb{R}$ una función continua. Si f no se anula en ningún punto de su dominio, entonces no existe ninguna sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de K tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0$.

3. Sean $A,B\subseteq\mathbb{R}$ dos subconjuntos. Entonces $\overline{A}\cap\overline{B}\neq\emptyset$ si y solamente si existen sucesiones convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A y de B, respectivamente, tales que $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n$.

4. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de términos positivos tales que $a_1+a_2+\cdots+a_n\leq 1$ para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge.

5. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función tal que $V_a^b(f)=0$, entonces f es constante.

6. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua y acotada, entonces existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x$.

7. Sean $A,B\subseteq\mathbb{R}$ dos conjuntos acotados y no vacíos. Si $\sup A\leq\inf B$, entonces para cada $a\in A$ y cada $b\in B$ se tiene que $a\leq b$.

Este y el anterior son dos variantes: quedaría uno solo de los dos.

8. Sean $A,B\subseteq\mathbb{R}$ dos conjuntos acotados y no vacíos. Si $\sup A\leq\inf B$, entonces existe $c\in\mathbb{R}$ tal que para cada $a\in A$ y cada $b\in B$ se tiene que $a\leq c\leq b$.

9. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de números reales que es monótona y acotada, entonces el límite $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.

Muestre que los siguientes enunciados son falsos:

10. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Si existe el límite $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = |f(x_0)|$, entonces f es continua en x_0.

11. Sean $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua. Si f no se anula en ningún punto de su dominio, entonces no existen $x, y \in K$ tales que $f(x) < 0 < f(y)$.

12. Si U y V son subconjuntos de $\mathbb{R}$, es $\overline{U \cap V} = \overline{U} \cap \overline{V}$.

13. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números positivos. Entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge si y solamente si la serie $\sum_{n\geq 1} a_n^2$ converge.

14. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ son dos sucesiones acotadas de números reales, entonces

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

15. Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ y al menos uno de los dos es abierto, entonces el conjunto $C = \{ab : a \in A, b \in B\}$ es abierto.

16. Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que es continua a derecha es acotada.

17. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto abierto, entonces $f(A)$ es también un conjunto abierto.