1	2	3	4	5
B	B / B⁻	/	B	R⁻

CALIF.
A

NOMBRE: Nelson Poma

No. LIBRETA: 854/11

Taller de Cálculo Avanzado - Prefinal (05/07/12)

1. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada y $c\in\mathbb{R}$. Probar :

$$\limsup(ca_n) = \begin{cases} c\limsup a_n, & \text{if } c>0 \\ c\liminf a_n, & \text{if } c<0. \end{cases}$$

2. Dados $A, B\subset\mathbb{R}$, sea $A+B=\{x\in\mathbb{R}:\ x=a+b,\ a\in A \text{ y } b\in B\}$. Probar:
   (a) Si A es abierto, entonces $A+B$ es abierto.
   (b) Si A es cerrado y $B=\{b\}$, entonces $A+B$ es cerrado.

3. Sea $A\subset\mathbb{R}$. Para cada $z\in A^c$ sea $f_z: A\to\mathbb{R}$ la función definida por $f_z(x)=\dfrac{1}{|x-z|}$. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:
   (a) A es cerrado
   (b) f_z es uniformemente continua para cada $z\in A^c$.

4. Sean $f,\alpha: [a,b]\to\mathbb{R}$ funciones tales que α es estrictamente creciente y f es continua y no negativa. Si $f(c)>0$ para algún $c\in[a,b]$, probar que $\displaystyle\int_a^b f\,d\alpha>0$.

5. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos, tal que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ converge. Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge.

Justifique sus respuestas

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

Taller de cálculo avanzado

Curso del 1er. cuatrimestre
2011

Examen 13 de Julio

1	
2	
3	
4	
5	

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Páginas: ....

1. Probar que $A \subset \mathbb{R}$ es abierto si y sólo si $\forall a \in A$, si $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, $\exists n_0 \,/\, x_n \in A$ $\forall n \geq n_0$.

2. Considerar la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Supongamos que $\exists\, c, M > 0$ tales que $|a_n c^n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $(-c, c)$ está contenido en el intervalo de convergencia de la serie.

3. Sean $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío y $x \in \mathbb{R}$. Se define la distancia de x a A como
$$d_A(x) = \inf\{|x - a| : a \in A\}.$$
   a) Probar que $\overline{A} = \{x : d_A(x) = 0\}$.
   b) Si C es una cota superior de A, probar que $\sup A = C - d_A(C)$.

4. Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto, y sean $f, f_n : K \to \mathbb{R}$ con f continua en K. Probar que $f_n \rightrightarrows f$ si y sólo si para toda sucesion $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ tal que $x_n \to x \in K$, se tiene que $f_n(x_n) \to f(x)$.

5. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que para toda $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona, existe $\int_a^b f d\alpha$. Demostrar que f es continua.

Taller de Cálculo Avanzado - Segundo Cuatrimestre de 2012

Examen - 29 de Noviembre

1	2	3	4

CALIF.

1. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión acotada de números reales. Sean $\{x_{r_k} : k \in \mathbb{N}\}$ y $\{x_{m_k} : k \in \mathbb{N}\}$ dos subsucesiones convergentes de la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Probar que si $\{r_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{m_k : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ entonces la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene a lo sumo dos puntos límites.

2. Sea $F \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado, F' el conjunto de sus puntos de acumulación y $A = F \setminus F'$ el conjunto de sus puntos aislados.
   (a) Probar que A es a lo sumo numerable.
   (b) Sea $B = F'$. ¿Puede B tener puntos aislados? En caso afirmativo, dar un ejemplo. En caso contrario, dar una demostración.

3. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que f y g son continuas en 0 y $f(0) > g(0)$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que $\inf\limits_{|x|<\delta} f(x) > \sup\limits_{|x|<\delta} g(x)$.

4. Sea α la función dada por

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

   (a) Si $f \in R(\alpha)$, entonces demostrar que $\int_{-1}^{1} f\, d\alpha = f(0)$.
   (b) Probar que si f es continua en 0, entonces $f \in R(\alpha)$.
   (c) Dar un ejemplo de una función que no está en $R(\alpha)$.

Taller de Cálculo Avanzado

1	
2	
3	
4	
5	

Curso del 1er. cuatrimestre
2011

Examen 20 de Julio

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Páginas: ....

1. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Supongamos que $x_n \longrightarrow a$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Sea $b \neq a$. Probar que $\exists n_0 \,/\, x_n \neq b \;\; \forall n \geq n_0$.

2. Sea $S \subset \mathbb{R}$. Probar que $a \in \partial S$ si y sólo si exiten $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \complement S$ (el complemento de S) con $x_n \longrightarrow a$ e $y_n \longrightarrow a$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

3. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y $v_n := \sum_{k=1}^{n} |x_{k+1} - x_k|$. Supongamos que la sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. Probar:
   a) La sucesión $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.
   b) La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

4. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que si $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, se tiene que f es uniformemente continua.

5. Sean $f, f_k, \alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f, f_k \in \mathcal{R}(\alpha)$ $\forall k$ y α es monótona creciente. Definamos $\psi, \psi_k : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\psi(x) = \int_a^x f\,d\alpha$, $\psi_k(x) = \int_a^x f_k\,d\alpha$. Probar que si $f_k \rightrightarrows f$ en $[a,b]$, entonces $\psi_k \rightrightarrows \psi$ en $[a,b]$.

19 de Diciembre de 2008

Nombre y Apellido:
L.U.:
Turno:

Recuperatorio del Prefinal.

1. Decidir si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas:

   (a) Sea (a_n) una sucesión real acotada. Si $L = \limsup a_n$ entonces existe una subsucesión decreciente de (a_n) que tiende a L.

   (b) Sea (a_n) una sucesión real acotada. Si $L = \limsup a_n$ entonces existe una subsucesión creciente de (a_n) que tiende a L.

   (c) Sea (a_n) una sucesión real acotada. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua entonces $\limsup f(a_n) = f(\limsup a_n)$.

2. Sea (a_n) una sucesión de números reales positivos.

   (a) Probar que si $\sum a_n$ converge, entonces $\sum (a_n a_{n+1})^{1/2}$ converge.

   (b) Probar que si (a_n) es monótona y $\sum (a_n a_{n+1})^{1/2}$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.

   Sugerencia Puede ser útil, para el item a), el hecho de que la media geométrica no supera a la media aritmética, es decir, que si $x, y \geq 0$ entonces $(xy)^{1/2} \leq \frac{x+y}{2}$.

3. Sean $f_n, g_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1}, \qquad g_n(x) = \frac{x}{nx+1}.$$

   Probar que:

   (a) Ambas convergen puntualmente a una función continua.

   (b) Una de ellas, converge uniformemente.

   (c) Una de ellas no converge uniformemente.

4. Sea $\alpha : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\alpha(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x \in [1,2]. \end{cases}$$

   Definir, si es posible, una función f discontinua en $x = 1$ tal que $f \in \Re(\alpha)$ y calcular $\int_0^2 f\,d\alpha$. Justificar adecuadamente, por qué la f definida es integrable respecto de α o por qué no existe, según cuál sea su respuesta.

JUSTIFIQUE SUS RESPUESTAS

TALLER DE CÁLCULO AVANZADO - PREFINAL

17 DE DICIEMBRE DE 2009

1	2	3	4	**Calificación**
B	B	B	B	4

Nombre:
[redacted]

LU:
[redacted]

1. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones tales que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Si $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, probar que:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

2. Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto tal que $0 \notin K$. Probar que $C := \{\frac{x}{y} : x, y \in K\}$ es compacto.

3. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua.

   i) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos de A. Probar que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

   ii) Probar que si x_0 es un punto de acumulación de A, entonces existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

4. Sea $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ creciente y continua en 1. Probar que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n \, d\alpha = 0.$$

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

2) Con $f(x,y)$ $K\times K \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y) = \frac{x}{y}$

$K\times K$ compacto por K ...

... compacto

1	2	3		4	5
X	X	RH	R	B	HR

Calif.
I

APELLIDO Y NOMBRE / LIBRETA: [redacted]

29 | 7 | 201

EXAMEN DE TALLER DE CÁLCULO AVANZADO

1. Sea $r \notin \mathbb{Q}$ y sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números naturales tales que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = r$. Calcular $\overline{\lim}\, a_n$ y $\overline{\lim}\, b_n$.

2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío tal que para cualquier conjunto finito no vacío $B \subseteq A$ se tiene que $A - B$ es cerrado.
   (a) Probar que todo punto de A es aislado.
   (b) ¿A es cerrado? (hacer una demostración en el caso afirmativo o exhibir un contraejemplo si no es cierto).

3. (a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no constante tal que la imagen de f es un conjunto finito. ¿Se puede asegurar que entonces f no es continua? (hacer una demostración en el caso afirmativo, en caso contrario exhibir un contraejemplo)
   (b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $a < b$ la integral $\int_a^b f \, df$ existe y es 0. Probar que f es una función constante.

4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada tal que v_f es una función Lipschitz. Probar que f es Lipschitz.

5. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y sea $b_n = a_n + 2a_{n+1} - a_{n+2}$.
   Probar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.
   [Aclaración: La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no se supone positiva.]

Justifique todas las respuestas y si utiliza algún resultado de la teórica o ejercicio de la práctica, especifique de cuál se trata, enunciándolo si hace falta.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.

1	2	3	4	5

EXAMEN DE TALLER DE CALCULO AVANZADO

Segundo cuatrimestre de 2010

Apellido y Nombres:

Número de Libreta Universitaria:

Turno de Trabajos Prácticos:

1. Sea $(x_n)_{n\geqslant 1}$ la sucesión de números reales definida por:

$$x_1 = 1$$
$$x_{n+1} = \frac{2x_n+3}{4}, \quad n \in I\!N.$$

Probar que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ es convergente y hallar su límite.

2. Sean A, B subconjuntos de $I\!R^n$ donde A es abierto. Demostrar que:

$$A \cap \overline{B} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad A \cap B \neq \emptyset.$$

$A \cap \overline{B} = \emptyset \Leftarrow A \cap B = \emptyset$

$X \in A \wedge X \in \overline{B}$ Que $A \cap B \neq \emptyset$

¿Vale la implicación anterior cuando A no es abierto? En caso afirmativo, demostrarlo; si la respuesta es negativa, exhibir un contraejemplo.

3. Dados $S, T \subset I\!R^n$ se define la distancia entre S y T en la forma:

$$dist(S,T) = \inf\{\|s-t\| : s \in S, t \in T\}.$$

Sea $f : I\!R^n \to I\!R$. Probar que si f es uniformemente continua en S, f es uniformemente continua en T y $\text{dist}(S,T) > 0$, entonces f es uniformemente continua en $S \cup T$.

4. Sea $f : [0,3] \to I\!R$; $f(x) = x - [x]$. Calcular, si es posible,

$$\int_0^3 x^2 dV_f(x).$$

5. Sean $(a_n)_{n\geqslant 1} \subset I\!R$ y $p, q \in I\!R$ tales que $p < q$. Probar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^p}$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^q}$ también es convergente.

$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(s_0) - f(t_0)\|$

29/7/2010

1	2	3	4	5

Calif.

APELLIDO Y NOMBRE / LIBRETA:

EXAMEN DE TALLER DE CÁLCULO AVANZADO FINAL

---

1. Sea $r \notin \mathbb{Q}$ y sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números naturales tales que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = r$. Calcular $\overline{\lim}\, a_n$ y $\overline{\lim}\, b_n$.

---

2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío tal que para cualquier conjunto finito no vacío $B \subseteq A$ se tiene que $A - B$ es cerrado.
   (a) Probar que todo punto de A es aislado.
   (b) ¿A es cerrado? (hacer una demostración en el caso afirmativo o exhibir un contraejemplo si no es cierto).

---

3. (a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no constante tal que la imagen de f es un conjunto finito. ¿Se puede asegurar que entonces f no es continua? (hacer una demostración en el caso afirmativo, en caso contrario exhibir un contraejemplo)
   (b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $a < b$ la integral $\int_a^b f \, \mathrm{d}f$ existe y es 0. Probar que f es una función constante.

---

4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada tal que v_f es una función Lipschitz. Probar que f es Lipschitz.

---

5. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y sea $b_n = a_n + 2a_{n+1} - a_{n+2}$.
   Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.
   [Aclaración: La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no se supone positiva.]

Justifique todas las respuestas y si utiliza algún resultado de la teórica o ejercicio de la práctica, especifique de cuál se trata, enunciándolo si hace falta.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.

Taller de cálculo avanzado

Curso del 1er. cuatrimestre
2011

Examen 27 de Julio

1
2
3
4
5

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Páginas: ....

1. Dado $S \subset \mathbb{R}$ acotado, se llama diámetro de S a
$$\operatorname{diam}(S) = \sup\{|x-y| \,/\, x, y \in S\}.$$
Probar que $\operatorname{diam}(S) = \operatorname{diam}(\overline{S})$.

2. Probar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ no tiene ninguna subsucesión convergente si y sólo si $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

3. Sea $f_n : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en S, se sigue que $f_n \rightrightarrows 0$ en S.

4. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supongamos que $f_n(0) \to l$ $(n \to \infty)$. Si además todas las f_n son derivables en $\mathbb{R}$ in $f'_n \rightrightarrows 0$ en $[-a, a]$ $\forall a \in \mathbb{R}$, probar que $f_n \rightrightarrows l$ en $[-a, a]$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

5. Probar que una función de variación acotada α satisface que $V_\alpha([a, b]) = 0$ si y sólo si α es constante en $[a, b]$.