Taller de Cálculo Avanzado
Primer Cuatrimestre — 2013

Práctica 5: Integrales

1. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Para cada partición $\pi=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ de $[a,b]$ definimos

$$\pi(f)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

Si $\pi_1\subset\pi_2$ son dos particiones de $[a,b]$, entonces $\pi_1(f)\le\pi_2(f)$.

2. Determine si las funciones siguientes son de variación acotada en el intervalo $[a,b]$ correspondiente y en caso afirmativo dar una mayoración para $V_f(a,b)$.

$$f(x)=\cos(x),\qquad x\in[0,3\pi]$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{si}\quad 0<x\le 1\\ 0 & \text{si}\quad x=0\end{cases}$$

$$f(x)=2x^3-3x^2,\qquad x\in[-1,2]$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)^2 & 0<x\le 1\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Estudie, además, la derivabilidad de la cuarta función.

3. Si f y g son funciones de variación acotada en $[a,b]$, entonces fg también lo es.

4. Para las funciones de variación acotada siguientes, encuentre la función V_f; recordemos que $V_f(a)=0$ y $V_f(x)=V_f(a,x)$ si $a<x\le b$):

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{si } -1\le x<0;\\ x, & \text{si } 0\le x<1;\\ 1-x, & \text{si } 1\le x\le 2.\end{cases}$$

$$f(x)=\sin x,\qquad x\in[0,2\pi]$$

Para cada una de estas funciones encuentre explícitamente funciones monótonas crecientes g_1 y g_2 tales que $f=g_1-g_2$.

5. Analice en cada caso la existencia de la integral $\int_a^b f\,d\alpha$ y calcúlela cuando corresponda.

(*a*) $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función arbitraria y f una función constante sobre $[a,b]$.

(*b*) $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua con $\alpha(a)=a_0$, $\alpha(b)=b_0$; $c\in(a,b)$ y $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}5 & \text{si } x\in[a,c);\\ 3 & \text{si } x=c;\\ -1 & \text{si } x\in(c,b].\end{cases}$$

¿Qué sucede si en lugar de ser α continua sólo se sabe que es continua en un entorno de c?

(*c*) f como en el ítem anterior y

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,c]; \\ -1 & \text{si } x \in (c,b]. \end{cases}$$

(*d*) $f(x) = x^3$, $\alpha(x) = x^2$ y $[a,b] = [-1,3]$.
(*e*) $f(x) = \alpha(x) = \cos(x)$ y $[a,b] = [0, \frac{\pi}{4}]$.

6. Sean $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que f es continua e integrable respecto de α en $[a,b]$ y sea c en (a,b). Si $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisface $\beta(x) = \alpha(x)$ para todo $x \neq c$, muestre que $f \in \mathfrak{R}(\beta)$ en $[a,b]$ y $\int_a^b f \, \mathrm{d}\alpha = \int_a^b f \, \mathrm{d}\beta$. ¿Qué sucede si $c = a$ o $c = b$?.

7. Consideremos las funciones siguientes definidas en el intervalo $[0,2]$:

$$f(x) = |x-1|, \qquad \alpha(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x = 0; \\ e^x & \text{si } x \in (0,2]. \end{cases}$$

Muestre que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ en $[0,2]$ y calcule $\int_0^2 f \; d\alpha$.

8. Sean f, $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea $c \in (a,b)$ tales que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ en $[a,c]$ y $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ en $[c,b]$. Muestre que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ en $[a,b]$ y $\int_a^b f \, \mathrm{d}\alpha = \int_a^c f \, \mathrm{d}\alpha + \int_c^b f \, \mathrm{d}\alpha$.

9. Si $\int_a^b f \, \mathrm{d}\alpha$ existe y es igual a 0 para toda función monótona creciente f, ¿qué se puede decir sobre la función α?

Sugerencia. Para cada $c \in [a,b]$ considere la función monótona f_c tal que $f_c(x) = 0$ si $a \leq x \leq c$ y $f_c(x) = 1$ en caso contrario.

10. Una función definida sobre un intervalo cerrado y acotado y de variación acotada es integrable en el sentido de Riemann.

11. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 en $[a,b]$, entonces f es de variación acotada y $V_f(a,b) = \int_a^b |f'(x)| \, \mathrm{d}x$.

12. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente.

(*a*) Existe $c \in (a,b)$ tal que $\int_a^b f \, \mathrm{d}\alpha = f(c)(\alpha(b) - \alpha(a))$.
(*b*) Si además α es derivable en (a,b) (pero no necesariamente de clase C^1), función

$$\psi(x) = \int_a^x f \, \mathrm{d}\alpha$$

es derivable en (a,b) y $\psi'(x) = f(x)\alpha'(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

13. Sea f, $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que f es una función continua y α es de variación acotada.

(*a*) $|\int_a^b f \, \mathrm{d}\alpha| \leq V_\alpha(a,b) \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$.
(*b*) Para cada $x \in [a,b]$ ponemos $\psi(x) = \int_a^x f \, \mathrm{d}\alpha$; notemos que ψ está bien definida. Muestre que ψ es de variación acotada.
(*c*) Si α satisface una condición de Lipschitz en $[a,b]$, entonces la función ψ definida en el punto anterior también satisface una condición de Lipschitz en $[a,b]$.