Taller de Cálculo Avanzado

Primer Cuatrimestre — 2013

Práctica 3: La topología de los espacios euclídeos

1. Decida si los siguientes conjuntos son abiertos, cerrados, acotados:

(*a*) $\mathbb{Q}$.

(*b*) $\mathbb{N}$.

(*c*) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

(*d*) $(0,1]$.

(*e*) $\left\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

(*f*) $\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

2. Sean S y T subconjuntos de $\mathbb{R}$. Muestre que:

(*a*) Si $S \subseteq T$, entonces $S^\circ \subseteq T^\circ$.

(*b*) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. ¿Se puede generalizar esta igualdad al caso de una intersección infinita?

(*c*) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. ¿Vale la igualdad?

(*d*) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?

(*e*) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. ¿Vale la igualdad?

(*f*) $(\mathbb{R} \setminus S)^\circ = \mathbb{R} \setminus \overline{S}$.

3. En cada uno de los siguientes casos encuentre S°, $\overline{S}$ y ∂S.

(*a*) $S = [0,1]$;

(*b*) $S = \mathbb{Q} \cap [0,1]$;

(*c*) $S = [-1,0) \cup \{1\}$;

(*d*) $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;

(*e*) $S = \{\frac{(-1)^n n}{1+n} : n \in \mathbb{N}\}$;

(*f*) $S = \mathbb{Z}$.

4. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$.

(*a*) S es abierto si y solo si es disjunto con ∂S.

(*b*) S es cerrado si y solo si $\partial S \subset S$.

(*c*) S es cerrado si y solo si $S = S^\circ \cup \partial S$.

5. Si $S \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\partial S = \overline{S} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus S}$.

6. Si $S \subseteq \mathbb{R}$, escribimos con S' al conjunto de todos los puntos de acumulación de S.

(*a*) Determine S' para cada uno de los conjuntos del Ejercicio **3**.

(*b*) Un punto $p \in S$ es un *punto aislado* de S si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(p-\varepsilon, p+\varepsilon) \cap S = \{p\}$. Muestre que $\overline{S} = S' \cup \{\text{puntos aislados de } S\}$.

7. Encuentre los puntos de acumulación del conjunto $S = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$.

8. Determine todos los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que son a la vez abiertos y cerrados.

9. ¿Son abiertos, cerrados, acotados los siguientes conjuntos?

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$.

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$.

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$.

10. Decida si las propiedades del Ejercicio **2** siguen siendo válidas si S y T son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

11. Encuentre los puntos de acumulación del conjunto

$$S = \{(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 : n, m \in \mathbb{N}\}$$

y la clausura $\overline{S}$.

12. Si $U_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x,y) - (0,n)\| < n\}$ para cada $n \geq 1$, muestre que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es el semiplano superior abierto.

13. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ es $I_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \subseteq \mathbb{R}$, muestre que $(0,1) = \bigcup_{n\geq 2} I_n$. ¿Existe un conjunto *finito* $\mathscr{F} \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0,1) = \bigcup\limits_{n\in\mathscr{F}} I_n$? ¿Es compacto el conjunto $(0,1)$?

14. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son compactos?

(a) $\mathbb{Q}$.

(b) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

(c) $\mathbb{R}$.

(d) $[0,1] \cup [100, 1000]$.

(e) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

(f) $\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

15. Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, entonces tiene mínimo y máximo.

16. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada y sea P el conjunto de sus puntos límite.

(a) El conjunto P es compacto.

(b) El límite inferior de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es el mínimo de P y el límite superior de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ el máximo.

17. Si S, $T \subseteq \mathbb{R}$ son dos conjuntos compactos, entonces $S \cup T$ y $S \cap T$ son compactos. ¿Qué ocurre si se toman uniones o intersecciones infinitas?

18. Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ es compacto si y sólo si toda sucesión contenida en S contiene una subsucesión que converge a un punto de S.

19. Si K es compacto y F es cerrado, entonces $K \cap F$ es compacto.

20. Si $K \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, entonces los conjuntos

$$S = \{x + y : x, y \in K\}$$

y

$$P = \{x.y : x, y \in K\}$$

son compactos.

21. Una *norma* en $\mathbb{R}^n$ es una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

- $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\|x\| = 0$ si y solamente si $x = 0$.

- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(a) Muestre que las funciones $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, son normas.

(b) Muestre que hay constantes positivas c, c', d, d' tales que

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c'\|x\|_1,$$
$$d\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq d'\|x\|_\infty$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(c) Si $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una norma, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $\varepsilon > 0$, llamamos *bola centrada en x de radio ε* al conjunto

$$B_\varepsilon(x) = \{y : \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto con respecto a $\|\cdot\|$ si para todo $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

Muestre que un conjunto es abierto con respecto a $\|\cdot\|_1$ sii es abierto con respecto a $\|\cdot\|_2$ sii es abierto con respecto a $\|\cdot\|_\infty$.

(d) Si $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una norma, decims que una sucesión $(x_k)_{k\geq 1}$ en $\mathbb{R}^n$ converge con respecto a $\|\cdot\|$ a un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0.$$

Muestre que una sucesión $(x_k)_{k\geq 1}$ converge a un punto $x \in \mathbb{R}^n$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_1$ sii lo hace con respecto a la norma $\|\cdot\|_2$ sii lo hace con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$.