Taller de Cálculo Avanzado

Primer Cuatrimestre — 2013

Práctica 1: Números reales y sucesiones

1. A partir de los axiomas de cuerpo pruebe que cualesquiera sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

(*a*) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

(*b*) Si $ab = ac$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$.

(*c*) Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

(*d*) Es $(-a)b = -(ab)$ y $(-a)(-b) = ab$.

(*e*) Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$.

2. A partir de los axiomas de cuerpo ordenado pruebe que cualesquiera sean $a, b, c \in \mathbb{R}$:

(*a*) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

(*b*) Si $a < b$, entonces $-b < -a$.

(*c*) Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.

(*d*) Si $ab > 0$, entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos.

(*e*) Si $a^2 + b^2 = 0$, entonces $a = b = 0$.

(*f*) Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

3. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Muestre que las siguientes afirmaciones relativas a un número $s \in \mathbb{R}$ son equivalentes.

(*a*) s es el supremo de A.

(*b*) s satisface las siguientes dos condiciones:

- para todo $a \in A$ se tiene $s \geq a$;
- si $t \geq a$ para todo $a \in A$, entonces $t \geq s$.

(*c*) s satisface las siguientes dos condiciones:

- para todo $a \in A$ se tiene que $s \geq a$;
- para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a$.

(*d*) s satisface las siguientes dos condiciones:

- para todo $a \in A$ se tiene que $s \geq a$;
- existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida A tal que $\lim_{n \to \infty} a_n = s$.

Enuncie enunciados equivalentes análogos para caracterizar el ínfimo de un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente.

4. Sean A y B dos conjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $A \subseteq B$.

(*a*) Si A y B están acotados superior e inferiormente, establezca y demuestre las relaciones de orden que hay entre los números $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\sup(B)$ e $\inf(B)$.

(*b*) ¿Qué sucede cuando alguno de los conjuntos no está acotado superior o inferiormente?

5. Hallar, si existen, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

(*a*) $A_1 = (a, b]$.
(*b*) $A_2 = \{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$.
(*c*) $A_3 = A_2 \cup \{0\}$.
(*d*) $A_4 = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$.
(*e*) $A_5 = \{x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R}\}$.
(*f*) $A_6 = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$.
(*g*) $A_7 = \{x^2 - 5x + 4 : x \in [2, 4)\}$.
(*h*) $A_8 = \varnothing$.

6. Si $A \subset \mathbb{R}$ es no vacío, para cada $c \in \mathbb{R}$ consideramos los conjuntos

$$c \cdot A = \{cx : x \in A\}, \qquad -A = (-1) \cdot A.$$

Pruebe las siguientes afirmaciones:

(*a*) Si el conjunto A está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente e $\inf(-A) = -\sup A$.
(*b*) Si $c > 0$ y el conjunto A está acotado superiormente, entonces $c \cdot A$ también lo está y $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$.
(*c*) ¿Qué se puede decir cuando $c < 0$?

Enuncie y demuestre resultados análogos a los anteriores para $\inf(c \cdot A)$.

7. Si A, $B \subseteq \mathbb{R}$ son ambos no vacíos, podemos considerar los conjuntos

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \qquad A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

(*a*) ¿Qué condiciones deben satisfacer A y B para que exista $\sup(A + B)$? Cuando se cumplen, ¿qué relación hay entre $\sup(A + B)$ y $\sup(A) + \sup(B)$?
(*b*) Realice el mismo estudio para el conjunto $A \cdot B$ y los números $\sup(A \cdot B)$ y $\sup(A) \cdot \sup(B)$.

8. Si x es un número real arbitrario, existe un único entero n tal que $n \leq x < n + 1$. Llamamos a este número n la *parte entera* de x y lo denotamos $[x]$.

9. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

(*a*) Si $r < L$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r$ para todo $n \geq n_0$.
(*b*) Si $r > L$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < r$ para todo $n \geq n_0$.
(*c*) ¿Puede reformularse (a) si se sabe solamente que $r \leq L$?
(*d*) ¿Qué puede decirse de L si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r$ para todo $n \geq n_0$?

10. Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Q}$ estrictamente decreciente tal que $\lim_{n\to\infty} q_n = x$.

11. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números positivos tal que $\lim a_n = A$, entonces se tiene que $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

12. Hay una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $b_1 = \sqrt{2}$ y $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$ para cada $n \geq 0$. Muestre que es monótona y que está acotada superiormente por 2, y determine su límite.

13. Sean x_1, $y_1 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 > y_1 > 0$ y, para cada $n \geq 0$, sean

$$x_{n+1} = (x_n + y_n)/2, \qquad y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}.$$

Pruebe que

$$y_n < y_{n+1} < x_1, \qquad y_1 < x_{n+1} < x_n$$

y

$$0 < x_{n+1} - y_{n+1} < (x_1 - y_1)/2^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y deduzca que que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

14. Hallar los puntos límites y los límites superior e inferior de las siguientes sucesiones:

(*a*) $1-\frac{1}{n}$,

(*b*) $(-1)^n$,

(*c*) $\cos\frac{n\pi}{2}$,

(*d*) $(-1)^n(2+\frac{3}{n})$,

(*e*) $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\ldots,$

(*f*) $\frac{1}{n}(n+(-1)^n(2n+1))$.

15. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones acotadas de números reales, determine las relaciones de orden entre los siguientes cuatro números:

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n), \qquad \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n),$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n+\limsup_{n\to\infty} b_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n+\liminf_{n\to\infty} b_n.$$

16. (*a*) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión con términos positivos tal que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\theta<1,$$

entonces $\lim a_n=0$.

(*b*) Usando este resultado, muestre que

(*i*) Si $\alpha>0$, entonces $\lim(\alpha^n/n!)=0$.

(*ii*) $\lim n!/n^n=0$.

(*iii*) Si $0<\alpha<1$ y k es un entero, entonces $\lim n^k\alpha^n=0$.

17. Sean $x_1, a\in\mathbb{R}$ tales que $x_1>0$ y $a>x_1^2+x_1$, y para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $x_{n+1}=a/(1+x_n)$. Entonces los intervalos $[x_1,x_2]$, $[x_3,x_4]$, … forman un encaje de intervalos y el único punto ξ común a todos ellos es una raíz de la ecuación $x^2+x=a$.

Sugerencia. Muestre que para todo $n\in\mathbb{N} x_{n+1}-x_n$ y x_n-x_{n-1} tienen signos diferentes y que existe $\theta\in(0,1)$ tal que $|x_{n+1}-x_n|\le\theta|x_n-x_{n-1}|$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

18. Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos cerrados y, para cada $n\in\mathbb{N}$, sea λ_n la longitud de I_n; supongamos que $I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots\supseteq I_n\supseteq I_{n+1}\supseteq\cdots$. Mostrar que $\lim\lambda_n$ existe y que si $\lim\lambda_n>0$ entonces $\bigcap_{n\ge1}I_n$ es un intervalo cerrado de longitud $\lim\lambda_n$.

19. Un número M es el límite superior de una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es acotada superiormente si y sólo si para todo $\varepsilon>0$

- existen infinitos $n\in\mathbb{N}$ para los que $a_n>M-\varepsilon$, y
- existe solamente una cantidad finita de $n\in\mathbb{N}$ para los que $a_n>M+\varepsilon$.

20. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y sea $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de las medias aritméticas, de manera que para cada $n\in\mathbb{N}$ es

$$\sigma_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

(*a*) Decida si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

(*i*) $\lim a_n=0 \implies \lim_{n\to\infty}\sigma_n=0$.

(*ii*) $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=0 \implies \lim_{n\to\infty}a_n=0$.

(*b*) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L, entonces $\lim\sigma_n=L$.

(*c*) ¿Puede suceder que $\limsup a_n=\infty$ mientras que $\lim\sigma_n=0$?

(*d*) Si $b_n=a_{n+1}-a_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$, $\lim\sigma_n=L$ y $\lim nb_n=0$, entonces $\lim a_n=L$.

Sugerencia. Muestre que $a_n-\sigma_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}kb_k$.

Augustin Louis Cauchy
1798–1857, Francia

«Cauchy está loco y no hay nada que podamos hacer al respecto pero, hoy en día, es el único que sabe como debe hacerse la matemática» — Niels Abel.»