Taller de Cálculo Avanzado

Primer Cuatrimestre — 2013

Prefinal

Apellido y nombre: ....

Carrera: .... L.U.: .... Hojas: ....

1	2	3	4	5	6	

1. Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua, entonces el conjunto

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$$

es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$.

2. Escribamos $\lfloor x \rfloor$ a la parte entera de x, y sean $\alpha : x \in \mathbb{R} \mapsto \lfloor x \rfloor \in \mathbb{R}$ y $\beta : x \in \mathbb{R} \mapsto x - \lfloor x \rfloor \in \mathbb{R}$. Muestre que las integrales

$$\int_0^3 x^2 \mathrm{d}\alpha, \qquad \int_0^3 x^2 \mathrm{d}\beta$$

existen y calcule sus valores.

3. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} < 1$.

(*a*) Muestre que la serie $\sum_{n\geq 1} a_{2n}$ converge.

(*b*) ¿Converge la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$?

4. (*a*) Encuentre todos los $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tales que $1 \leq x + \frac{1}{x} \leq 3$.

(*b*) Sea $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ una función con valores positivos. Si

$$\lim_{x\to 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2,$$

entonces f es acotada en un abierto que contiene a 0 y $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

5. Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de números reales y sea $p \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) = p$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = p$.

6. Muestre que si $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que el límite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe y es finito, entonces f es uniformemente continua.