CORTADURAS DE DEDEKIND

En la evolución de esta teoría se distinguen tres etapas: la primera aparece influida por la idea del número real como un objeto preexistente: cada número real *produce* una cortadura; la cortadura *define* al número y éste *determina* a la primera (Dedekind). La segunda etapa es la del *pensamiento concreto:* cada número real es una cortadura. La tercera etapa, inaugurada por Hilbert, está dominada por el *pensamiento axiomático*: las cortaduras sirven para probar que la noción de cuerpo ordenado completo es consistente con la aritmética de los números racionales. Desde el punto de vista axiomático el único objeto de la teoría de las cortaduras, que exponemos a continuación, es construir un ejemplo de cuerpo ordenado completo. El ciclo se cierra al probar que cualquier cuerpo ordenado completo es isomorfo al cuerpo de las cortaduras.

Suponemos conocidas las propiedades del cuerpo ordenado de los números racionales, al que denotamos por **Q**. Entre las que nos harán falta destacamos la *densidad:* el hecho de que entre dos números racionales distintos se encuentra siempre otro número racional, y la *arquimedianidad:* el hecho de que para cualquier número racional positivo r existe un entero positivo n tal que $1/n < r$. En lo que sigue la palabra *número es* sinónimo de *número racional;* no hay, por ahora, otros números. Los enunciados más sencillos van señalados con números romanos, y en algunos casos nos ha parecido conveniente omitir la fácil demostración.

Definición. Llamamos *cortadura* a un conjunto (o clase) α de números racionales que satisfaga las siguientes propiedades:

1. $\alpha \neq \varnothing$ y $\alpha \neq \mathbf{Q}$; es decir, α es un subconjunto propio de **Q**;
2. si $r \in \alpha$ y $s > r$, entonces $s \in \alpha$; es decir, todo número mayor que un elemento de α pertenece también a α;
3. α no tiene mínimo.

La clase complementaria $\overline{\alpha}$ formada por los números racionales que no pertenecen a α, posee entonces la siguiente propiedad:

$$\text{si} \quad r \in \overline{\alpha} \quad \text{y} \quad s \in \alpha, \quad \text{entonces} \quad r < s.$$

En efecto, si fuera $r \geq s$, en virtud de (2) se tendría $r \in \alpha$.

Antes de seguir adelante, conviene analizar con cuidado los siguientes ejemplos.

Ejemplos

1. Para cada número r, el conjunto de los números mayores que r es una cortadura que denotamos por r^*. En particular, 0^* está formada por los números positivos y 1^* por los números mayores que 1.

2. Denotemos por α el conjunto de los racionales positivos que verifican $r^2 > 2$. Es claro que cualquiera de estos números es mayor que 1 y que si $r \in \alpha$, la relación $s > r$ implica $s \in \alpha$. También es claro que α no es vacía y que tampoco lo es la clase complementaria $\overline{\alpha}$ (ésta contiene al número 1 y a todos los números negativos). Para probar que α es una cortadura sólo faltaría mostrar que no tiene mínimo.

Dado $r \in \alpha$, si $0 < \delta < 1$, entonces tendremos $r - \delta > 0$ y además:

$$(r-\delta)^2 = r^2 - 2r\delta + \delta^2 > r^2 - 2r\delta,$$

y el último número es mayor que 2 siempre que se cumpla $(r^2 - 2)/2r > \delta$. Ahora bien, un número δ entre 0 y 1 que cumpla la última condición es, por ejemplo,

$$\delta = \frac{r^2 - 2}{r^2 - 2 + 2r}.$$

Este número verifica las condiciones que se requieren para que $r - \delta$ pertenezca a α, a saber: $r - \delta > 0$ y $(r-\delta)^2 > 2$.

Hemos probado que α es una cortadura. Sin embargo, esta cortadura difiere de las del ejemplo anterior en el hecho de que su clase complementaria $\overline{\alpha}$ no tiene máximo. En efecto, sea r un número positivo que verifica $r^2 < 2$. Entonces podemos hallar un número δ entre 0 y 1 que verifique $(r+\delta)^2 < 2$. Pues si $0 < \delta < 1$, tendremos:

$$(r+\delta)^2 = r^2 + 2r\delta + \delta^2 < r^2 + 2r\delta + \delta = r^2 + (2r+1)\delta < 2,$$

a condición de que se cumpla $\delta < (2-r^2)/(2r+1)$. Basta, entonces, elegir:

$$\delta = \frac{2-r^2}{2-r^2+2r+1} = \frac{2-r^2}{3-r^2+2r}$$

para tener cumplidas las dos condiciones. Queda así demostrado que α es una cortadura cuya clase complementaria $\overline{\alpha}$ no tiene máximo.

En adelante denotamos las cortaduras por letras griegas: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; los elementos de cada una de ellas por las correspondientes letras mayúsculas: A, B, C, ... y los de sus respectivas clases complementarias por las correspondientes letras minúsculas: a, b, c, ..., lo que facilita algunos razonamientos, si se tiene en cuenta que en cualquier circunstancia será $a < A$, $b < B$, $c < C, \ldots$ etc.

Ordenación. Es fácil ver que para cualquier par de cortaduras se verifica alguna de las inclusiones:

$$\alpha \subset \beta \quad \text{o bien} \quad \beta \subset \alpha .$$

En efecto, si α no está incluida en β, existe un número A en α que no está en β, y por consiguiente, $A = b$ (un número de la clase $\overline{\beta}$). Pero entonces, cualquier B de la clase β verifica $B > A$, de donde $B \in \alpha$ por definición de cortadura. Hemos probado que si α no está incluida en β, entonces β está incluida en α. **Q.E.D.**

Definición. $\alpha \leq \beta$ si y sólo si $\alpha \supset \beta$.

Se ve fácilmente que la relación $\leq$ es una relación de orden (reflexiva, antisimétrica y transitiva). Como es usual: **(i)** $\alpha < \beta$ significa $\alpha \leq \beta$ y $\alpha \neq \beta$; **(ii)** $\alpha \leq \beta$ equivale a $\beta \geq \alpha$ y finalmente, **(iii)** $\alpha < \beta$ equivale a $\beta > \alpha$.

Un conjunto de cortaduras $\Gamma = (\alpha)$ se llama ***acotado inferiormente*** si existe una cortadura β con la propiedad de que para todo α, $\alpha \in \Gamma$ implica $\beta \leq \alpha$. De cualquier cortadura β que tenga esta propiedad decimos que es una ***cota inferior*** de Γ.

En forma simétrica se definen los conceptos de ***conjunto acotado superiormente*** y ***cota superior.***

Teorema. Si Γ es no vacío y acotado inferiormente, existe una cortadura γ tal que

1º) γ es una cota inferior de Γ;

2º) si β es una cota inferior de Γ, entonces $\beta \leq \gamma$.

En otras palabras, γ es la ***cota inferior máxima*** de Γ.

Demostración. Supongamos que la cortadura β verifica $\beta \leq \alpha$ para cualquier α del conjunto Γ. En otras palabras, supongamos que para cada α, $\alpha \in \Gamma$ implica $\alpha \subset \beta$. Definamos ahora la clase γ de números racionales como unión de todas las cortaduras del conjunto Γ:

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} \alpha .$$

Es decir, $r \in \gamma$ si y sólo si $r \in \alpha$ para algún α del conjunto Γ.

Es fácil ver que: (1º) $\gamma \subset \beta$; (2º) γ es una cortadura; (3º) $\alpha \in \Gamma$ implica $\alpha \subset \gamma$, es decir, $\gamma \leq \alpha$. Luego, la cortadura γ es una cota inferior de Γ.

Notemos que $\beta \leq \gamma$ y que esta relación se mantiene válida si en el lugar de β se pone cualquier cota inferior de Γ. Lo que demuestra que γ es la cota inferior máxima de Γ.

Q.E.D.

La cortadura γ se llama ***extremo inferior*** (o ***ínfimo***) de Γ y se denota por $\inf \Gamma$.

Corolario. Si un conjunto Γ de cortaduras es no vacío y acotado superiormente, entonces Γ posee una cota superior mínima.

En efecto, el conjunto Σ formado por las cotas superiores de Γ es no vacío y acotado inferiormente por cualquier elemento de Γ; de donde se sigue que la cortadura $\sigma = \inf \Sigma$ es una cota superior de Γ, es decir, un elemento de Σ, y por consiguiente el mínimo de este conjunto. **Q.E.D.**

La cortadura σ se llama ***extremo superior*** (o ***supremo***) de Γ y se denota por $\sup \Gamma$.

El siguiente lema será de gran utilidad para estudiar las propiedades aritméticas de las cortaduras:

Lema. Dados: una cortadura α, un número a_0 de su clase complementaria $\overline{\alpha}$ y un número $t > 0$, existe un par de números $A \in \alpha$ y $a \in \overline{\alpha}$, tal que

$$a \geq a_0 \quad \text{y} \quad A - a < t .$$

Para demostrarlo elegimos un número A_0 en α y un número natural n tal que

$$\frac{A_0 - a_0}{n} < t \quad \text{(propiedad de Arquímedes);}$$

y a continuación elegimos el mínimo entero k tal que $a_0 + k\,\dfrac{A_0 - a_0}{n} \in \alpha$. Nótese que para $k = n$ se obtiene A_0 y para $k = 0$ se obtiene a_0.

Entonces, los números: $A = a_0 + k\,\dfrac{A_0 - a_0}{n}$ y $a = a_0 + (k-1)\dfrac{A_0 - a_0}{n}$ verifican las condiciones del lema. En particular, para cualquier α y cualquier número $t > 0$, existe un par de números $A \in \alpha$ y $a \in \overline{\alpha}$ tal que $A - a < t$.

Suma de cortaduras. La suma de las cortaduras α y β se define por medio de la fórmula

$$\alpha+\beta=\{A+B:\ A\in\alpha,\ B\in\beta\}.$$

A partir de la definición se demuestran fácilmente las siguientes propiedades:

I. $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$, $\quad\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

II. $\alpha+0^*=\alpha$.

Para la demostración de la segunda basta recordar que los elementos de 0^* son los números positivos y que α no tiene mínimo: si $A\in\alpha$, existe $A'<A$ también en α. Entonces $A=A'+(A-A')\in\alpha+0^*$.

III. Para cualquier α, existe una cortadura β tal que $\alpha+\beta=0^*$.

Pongamos: $\beta=\{B:\ B>-a$ para algún a en $\overline{\alpha}\}$. Es muy fácil probar que la clase β es una cortadura:

(1) β no es vacía, pues basta elegir $B=-a+1$ con algún a en $\overline{\alpha}$ para tener un elemento de β. En cuanto a la clase complementaria de β, si $A\in\alpha$ el número $-A$ no puede pertenecer a β, pues la desigualdad $-A>-a$ equivale a $A<a$, que es absurda. Luego, $\beta\neq\varnothing$ y $\overline{\beta}\neq\varnothing$.

(2) Por la definición de β se ve claramente que todo número mayor que un elemento de β es otro número de la misma clase.

(3) Por último, si $B>-a$, basta elegir un número B' que verifique $B>B'>-a$ para tener un número menor que B en la clase β; es decir, β no tiene mínimo.

Probemos ahora que $\alpha+\beta=0^*$. En efecto, un número de $\alpha+\beta$ tiene la forma $A+B$, donde $A\in\alpha$ y $B>-a$ para algún a en la clase inferior de α. Pero entonces

$$A+B>A+(-a)=A-a>0,$$

lo que muestra que $A + B \in 0^*$. Recíprocamente, si $t \in 0^*$, entonces $t > 0$, y en virtud del lema anterior existen números A y a tales que $A - a < t$. Por consiguiente, existe un número positivo s tal que $t = A - a + s = A + (-a + s) = A + B$. **Q.E.D.**

La cortadura β de la demostración anterior se representa por medio del símbolo $-\alpha$.

Ejercicio. Mostrar que si $\alpha + \beta = 0^*$, entonces $\beta = -\alpha$ (la cortadura opuesta de α es única). En particular, $-0^* = 0^*$.

IV. Si $\alpha \leq \beta$, entonces $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ para cualquier γ.

En efecto, si $\alpha \supset \beta$, entonces $\alpha + \gamma \supset \beta + \gamma$.

Definición. $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$.

Ejercicio. Mostrar que $\alpha \leq \beta$ equivale a $\beta - \alpha \geq 0^*$. En particular, $\alpha \leq 0^*$ equivale a $-\alpha \geq 0^*$.

Producto de cortaduras no negativas. De una cortadura α que verifique $\alpha \geq 0^*$ decimos que es *no negativa*; las que verifican $\alpha > 0^*$ se llaman *positivas*. Notemos que $\alpha \geq 0^*$ equivale a $\alpha \subset 0^*$, de modo que los números de una cortadura no negativa son todos positivos. Para que α sea positiva se requiere que haya un número positivo en la clase complementaria $\overline{\alpha}$.

El ***producto*** de cortaduras no negativas se define por la siguiente fórmula:

Definición. $\alpha\beta = \{AB : A \in \alpha, B \in \beta\}$.

Probemos primero que la clase así definida es una cortadura.

(1) Claramente no es vacía y su complemento, que incluye al cero y a todos los racionales negativos, tampoco lo es. (2) Si el número r es mayor que un número AB de la clase $\alpha\beta$, entonces existe un número $s > 0$ tal que

$$r = AB + s = A\left(B + \frac{s}{A}\right) = AB',$$

lo que muestra que r está en la clase $\alpha\beta$. (3) Que la clase $\alpha\beta$ no tiene mínimo es muy claro si se piensa que no lo tiene ninguna de las cortaduras α y β y que éstas constan de números positivos exclusivamente. **Q.E.D.**

Todas las cortaduras que se consideran en lo que resta del presente párrafo son no negativas.

V. $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma, \quad \alpha\beta = \beta\alpha, \quad \alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$

Probamos solamente la tercera (ley distributiva). Cualquier número del primer miembro tiene la forma $A(B+C) = AB + AC$, que es la forma de un número del segundo miembro. Recíprocamente, un número del segundo miembro es de la forma $AB + A'C$. Si suponemos que $A \le A'$, tendremos $AB + A'C \ge AB + AC = A(B+C)$, un número del primer miembro. Por tanto, el número considerado también pertenece al primer miembro.

VI. $\alpha 1^* = \alpha$.

En efecto, un número del primer miembro es de la forma Ar con $r > 1$, que da como resultado un número de α por ser mayor que A.

Recíprocamente: si $A \in \alpha$, puesto que ninguna cortadura tiene mínimo, existe en la misma clase α un número $A' < A$. Entonces el número $A = A' \dfrac{A}{A'}$ tiene la forma de un número del primer miembro. **Q.E.D.**

Ejercicio 3. Mostrar que $\alpha 0^* = 0^*$.

VII. Si $\alpha > 0^*$, entonces existe una cortadura β tal que $\alpha\beta = 1^*$.

Puesto que α es positiva, existe un número $a_0 > 0$ en la clase inferior de α.

Definamos la clase β de la siguiente manera:

$$\beta = \{B : \; B > \frac{1}{a} \text{ para algún } a > 0 \text{ en la clase complementaria } \overline{\alpha} \}.$$

En primer lugar, es muy fácil probar que la clase así definida es una cortadura positiva. Para probar la igualdad del enunciado comencemos observando que un número del primer miembro tiene la forma AB con $B > 1/a$ para algún a positivo en la clase inferior de α. Pero entonces $AB > A/a > 1$ y AB es un número del segundo miembro.

Recíprocamente: sea $r > 1$. En virtud del lema, para cualquier t positivo existen números $A \in \alpha$ y $a \in \mathbf{C}\alpha$ tales que $a \geq a_0$ y $A - a < t$. Luego,

$$\frac{A}{a} = \frac{a + (A - a)}{a} = 1 + \frac{A - a}{a} < 1 + \frac{t}{a_0} = r,$$

siempre que elijamos $t = a_0(r - 1)$. Entonces existe un número $s > 0$ tal que

$$r = \frac{A}{a} + s = A\left(\frac{1}{a} + \frac{s}{A}\right) = AB,$$

lo que muestra que r es un número de la clase $\alpha\beta$. **Q.E.D.**

Producto de cortaduras cualesquiera. Extendemos la definición del producto a cualquier par de cortaduras por medio de las siguientes fórmulas:

$$\alpha\beta = \begin{cases} -\alpha(-\beta) & \text{si } \alpha \geq 0^* \text{ y } \beta < 0^*, \\ -(-\alpha)\beta & \text{si } \alpha < 0^* \text{ y } \beta \geq 0^*, \\ (-\alpha)(-\beta) & \text{si } \alpha < 0^* \text{ y } \beta < 0^*. \end{cases}$$

VIII. (regla de los signos) $\alpha(-\beta) = -\alpha\beta$.

El análisis de los cuatro casos posibles se deja como ejercicio.

IX. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

La demostración exige una consideración de casos:

1º) $\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$, $\gamma < 0^*$, $\beta + \gamma \geq 0^*$. Entonces

$$\alpha\beta = \alpha\left[(\beta + \gamma) + (-\gamma)\right] = \alpha(\beta + \gamma) - \alpha\gamma.$$

2º) $\alpha \geq 0^*$, $\beta \geq 0^*$, $\gamma < 0^*$, $\beta + \gamma < 0^*$. Por el caso anterior,

$$\alpha(\beta+\gamma) = -\alpha(-\gamma-\beta) = -\left[\alpha(-\gamma) + \alpha(-\beta)\right] = \alpha\beta + \alpha\gamma\,.$$

3º) $\alpha \geq 0^*$, $\beta < 0^*$, $\gamma \geq 0^*$. Este caso se reduce a los anteriores por la propiedad conmutativa de la suma.

4º) $\alpha \geq 0^*$, $\beta < 0^*$, $\gamma < 0^*$. En este caso,

$$\alpha(\beta+\gamma) = -\alpha(-\beta-\gamma) = -\left[\alpha(-\beta) + \alpha(-\gamma)\right] = \alpha\beta + \alpha\gamma,$$

con lo que se agotan todas las posibilidades para el caso $\alpha \geq 0^*$.

Finalmente, si $\alpha < 0^*$ podemos emplear de entrada la regla de los signos:

$$\alpha(\beta+\gamma) = -(-\alpha)(\beta+\gamma)\,. \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

X. Si $\alpha \leq \beta$ y $\gamma \geq 0^*$, entonces $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

Resumiendo, hemos probado el siguiente teorema:

Teorema. ***Existe un cuerpo ordenado en el que todo subconjunto no vacío y acotado superiormente posee una cota superior mínima.***

Un cuerpo ordenado con dichas propiedades se llama ***completo*** y es esencialmente único, en el sentido de que cualquier otro campo con las mismas propiedades es isomorfo a él.

Bibliografía

1. T.J. Bromwich, *An Introduction to the Theory of Infinite Series*, Chelsea, 1991.

2. T. Dantzig, *Number, The Language of Science*, The Macmillam Company, 1954.

3. R. Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers*, Dover, N. York, 1963.

4. G.H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, décima edición, 1958.

5. E.W. Hobson, *The Theory of Functions of a Rea l Variable*, Cambridge University Press, Vol. I, 1927.

6. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3a. edición, MacGraw Hill, 1976.

Norberto Fava Buenos Aires, 23 de abril de 1999