Funciones continuas

Mariano Suárez-Alvarez

4 de junio, 2013

Índice

§1. Funciones continuas

1.1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Si $x_0 \in A$, decimos que f es *continua en x_0* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A,\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Si f es continua en cada punto de A, decimos que f es *continua*.

1.2. Proposición. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in A$. La función f es continua en x_0 sii para cada $\varepsilon > 0$ existe δ_0 tal que $f(A \cap B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$.*

Demostración. Esto es simplemente una reescritura de la definición. □

1.3. Proposición. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. La función f es continua sii para cada abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ existe un abierto $V \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(U) = A \cap V$.*

Compilado: 9 de mayo de 2015

Demostración. Supongamos primero que f es una función continua y sea $U \subseteq \mathbb{R}$ un abierto. Si $x \in f^{-1}(U)$, entonces —porque U es abierto y $f(x) \in U$— existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $B_{\varepsilon_x}(f(x)) \subseteq U$ y, porque f es continua en x, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$f(B_{\delta_x}(x) \cap A) \subseteq B_{\varepsilon_x}(f(x)).$$

Consideremos ahora el conjunto $V = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} B_{\delta_x}(x)$, que es un abierto de $\mathbb{R}$ porque es una unión de abiertos. Notemos que

$$\begin{aligned} f(A \cap V) &= f\left(A \cap \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} B_{\delta_x}(x)\right) = f\left(\bigcup_{x \in f^{-1}(U)} A \cap B_{\delta_x}(x)\right) \\ &= \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} f(A \cap B_{\delta_x}(x)) \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U, \end{aligned}$$

así que $A \cap V \subseteq f^{-1}(U)$. Por otro lado, si $x \in f^{-1}(U)$, entonces $x \in A$ y $x \in B_{\delta_x}(x) \subseteq V$, de manera que $x \in A \cap V$. Vemos así que $f^{-1}(U) = A \cap V$, como queríamos. Esto prueba la necesidad de la condición del enunciado.

Recíprocamente, supongamos que esa condición se satisface, sea $x_0 \in A$ y mostremos que f es continua en x_0. Sea $\varepsilon > 0$. Como el conjunto $B_\varepsilon(f(x_0))$ es un abierto de $\mathbb{R}$, la hipótesis nos dice que existe un abierto $V \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))) = A \cap V. \tag{1}$$

Claramente $x_0 \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))$, de manera que $x_0 \in V$, y entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq V$, ya que V es abierto. Usando esto y (1), vemos que

$$f(A \cap B_\delta(x_0)) \subseteq f(A \cap V) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

La Proposición 1.2, entonces, nos dice que f es continua en x_0. □

1.4. Proposición. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$. La función f es continua en x_0 sii para cada sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ con valores en A que converge a x_0, la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x_0)$.*

Demostración. Veamos primero la necesidad de la condición. Supongamos que la función f es continua en x_0 y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión con valores en A que converge a x_0. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A,\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Por otro lado, como la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x_0, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies |x_n - x_0| < \delta. \tag{3}$$

Si ahora $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n \geq N$, de (3) vemos que $|x_n - x_0| < \delta$, así que (2) nos dice que $|f(x_n) - (x_0)| < \varepsilon$. Esto muestra que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge a $f(x_0)$.

Supongamos ahora, recíprocamente, que la condición del enunciado se satisface y, para llegar a un absurdo, supongamos que f no es continua en x_0. Existe entonces $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \geq 1$ existe un punto $x_n \in A$ tal que

$$|x_n - x_0| < \tfrac{1}{n} \tag{4}$$

y

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon. \tag{5}$$

Es inmediato de (4) que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a x_0, así que la hipótesis nos dice que la sucesión $(f(x_n))_{\geq 1}$ converge a $f(x_0)$ y, en particular, que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x_{n_0}) - f(x_0)| < \varepsilon$. Esto es imposible, ya que contradice a (5). □

§2. Algunas propiedades básicas

2.1. Proposición. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $X \subseteq A$ es un subconjunto, entonces la restricción $f|_X : X \to \mathbb{R}$ es continua.*

Demostración. Sea $x_0 \in B$ y sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que $f(A \cap B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$. Ahora bien, como $X \cap B_\delta(x_0) \subseteq A \cap B_\delta(x_0)$, es

$$f|_X(X \cap B_\delta(x_0)) = f(X \cap B_\delta(x_0)) \subseteq f(A \cap B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)) = B_\varepsilon(f|_X(x_0))$$

y esto nos dice que $f|_X$ es continua en x_0. □

2.2. Proposición. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función.*

(i) *Si existe una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ y para cada $i \in I$ la restricción $f|_{A\cap U_i} : A \cap U_i \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es continua.*

(ii) *Si existe una familia* finita *$\{F_1, \ldots, F_n\}$ de conjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n F_i$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ la restricción $f|_{A\cap F_i} : A \cap F_i \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es continua.*

Demostración. (i) Basta mostrar que, bajo la hipótesis, la función f es continua en cada punto de A. Sea entonces $x_0 \in A$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, existe $j \in I$ tal que $x_0 \in U_j$ y, como U_j es abierto, existe $\delta_0 > 0$ tal que $B_{\delta_0}(x_0) \subseteq U_j$. Por otro lado, como la restricción $f|_{A\cap U_j} : A \cap U_j \to \mathbb{R}$ es continua y $x_0 \in A \cap U_j$, existe $\delta \in (0, \delta_0)$ tal que $f(A \cap U_j \cap B_\delta(x_0))) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$. Como elegimos $\delta < \delta_0$, es $A \cap U_j \cap B_\delta(x_0) = A \cap B_\delta(x_0)$, y entonces $f(A \cap B_\delta(x_0))) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$: vemos así que la función f es continua en x_0.

(ii) Supongamos primero que $n = 2$. Sea $x_0 \in A$ y $\varepsilon > 0$. Como $A \subseteq F_1 \cup F_2$, sabemos que $x_0 \in F_1$ o $x_0 \in F_2$. Consideramos dos casos:

- Primero, supongamos que $x_0 \in F_1 \cap F_2$. Como las restricciones $f|_{A\cap F_1} : A \cap F_1 \to \mathbb{R}$ y $f|_{A\cap F_2} : A \cap F_2 \to \mathbb{R}$ son continuas por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que

$f(A \cap F_1 \cap B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$ y $f(A \cap F_2 \cap B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$ y, en consecuencia, tenemos que

$$\begin{aligned} f(A \cap B_\delta(x_0)) &= f\Big(\big(A \cap F_1 \cap B_\delta(x_0)\big) \cup \big(A \cap F_1 \cap B_\delta(x_0)\big) \Big) \\ &= f\big(A \cap F_1 \cap B_\delta(x_0)\big) \cup f\big(A \cap F_1 \cap B_\delta(x_0)\big) \\ &\subseteq B_\varepsilon(f(x_0)). \end{aligned}$$

- En segundo lugar, supongamos que por el contrario $x_0 \notin F_1 \cap F_2$; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_0 \in F_1$ y $x_0 \notin F_2$. Como F_2 es un conjunto cerrado, existe $\delta_0 > 0$ tal que $B_{\delta_0}(x_0) \cap F_2 = \emptyset$ y, como de acuerdo a la hipótesis la restricción $f|_{A \cap F_1} : A \cap F_1 \to \mathbb{R}$ es continua, existe $\delta \in (0, \delta_0)$ tal que $f(A \cap F_1 \cap B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$. Como $A \subseteq F_1 \cup F_2$, es

  $$A \cap B_\delta(x_0) = \big(A \cap F_1 \cap B_\delta(x_0)\big) \cup \big(A \cap F_2 \cap B_\delta(x_0)\big)$$

  y, por otro lado, $A \cap F_2 \cap B_\delta(x_0) = \emptyset$, así que

  $$f(A \cap B_\delta(x_0)) = f(A \cap F_1 \cap B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Así, en cualquiera de los dos casos encontramos un número $\delta > 0$ tal que

$$f(A \cap B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$$

y, entonces, podemos concluir que la función f es continua en x_0. $\square$

2.3. Proposición. *Sean $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos y $f : A_1 \to \mathbb{R}$ y $g : A_2 \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $g(A_2) \subseteq A_1$.*

(i) *Sea $x_0 \in A_1$. Si g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$, entonces la composición $f \circ g$ es continua en x_0.*

(ii) *Si f y g son continuas, entonces la composición $f \circ g$ es continua.*

Demostración. Basta mostrar la primera parte, ya que la segunda es consecuencia inmediata de aquella. Sea $x_0 \in A_2$ y mostremos que $f \circ g$ es continua en x_0. Sea $\varepsilon > 0$. Como la función f es continua en $g(x_0)$, existe $\eta > 0$ tal que

$$f(A_1 \cap B_\eta(g(x_0))) \subseteq B_\varepsilon(f(g(x_0))).$$

Por otro lado, la función g es continua en x_0 así que existe $\delta > 0$ tal que

$$g(A_2 \cap B_\delta(x_0)) \subseteq B_\eta(g(x_0)).$$

Como por hipótesis también es $g(A_2 \cap B_\delta(x_0)) \subseteq A_1$, tenemos entonces que

$$f(g(A_2 \cap B_\delta(x_0))) \subseteq f(A_1 \cap B_\eta(g(x_0))) \subseteq B_\varepsilon(f(g(x_0))),$$

es decir, que $(f \circ g)(A_2 \cap B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon((f \circ g)(x_0))$. Esto muestra que $f \circ g$ es continua en x_0, como queríamos. $\square$

2.4. Proposición. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto y sea $x_0 \in A$.*

(i) *Toda función constante $f : A \to \mathbb{R}$ es continua.*

(ii) *Si $f, g : A \to \mathbb{R}$ son dos funciones continuas en x_0, entonces las funciones $f+g$ y $f \cdot g$ son funciones continuas en x_0.*

(iii) *Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$, entonces existe $\delta_0 > 0$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in B_{\delta_0}(x_0)$ y la función $\frac{1}{f} : B_{\delta_0}(x_0) \to \mathbb{R}$ es continua en x_0.*

Demostración. (i) Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función constante. Si $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$, entonces si ponemos $\delta = 1$ tenemos que $f(A \cap B_\delta(x_0)) = \{f(x_0)\} \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$. Esto nos dice que f es continua en x_0.

(ii) Sea primero $s = f + g$. Sea $\varepsilon > 0$. Como f y g son continuas en x_0 existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A,\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad |g(x) - g(x_0)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Entonces, si $x \in A$ y $|x - x_0| < \delta$ tenemos que

$$\begin{aligned} \big|s(x) - s(x_0)\big| &= \big|(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0)\big| \\ &\leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

y esto significa que s es continua en x_0.

En segundo lugar, consideremos la función $p = f \cdot g$. Sean

$$\alpha = \frac{1}{2|f(x_0)|}, \qquad \beta = \frac{1}{2(|g(x_0) + \alpha\varepsilon|)}.$$

Como g es continua en x_0, existe $\eta > 0$ tal que

$$x \in A,\ |x - x_0| < \eta \implies |g(x) - g(x_0)| < \alpha\varepsilon \tag{6}$$

y, en particular, tenemos que

$$x \in A,\ |x - x_0| < \eta \implies |g(x)| < |g(x_0)| + \alpha\varepsilon \tag{7}$$

Por otro lado, como f es continua en x_0, existe $\delta \in (0, \eta)$ tal que

$$x \in A,\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \beta\varepsilon. \tag{8}$$

Entonces, si $x \in A$ y $|x - x_0| < \delta$, tenemos que

$$\begin{aligned} |p(x) - p(x_0)| &= |f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x_0)g(x)| + |f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \\ &= |f(x) - f(x_0)||g(x)| + |f(x_0)||g(x) - g(x_0)| \end{aligned}$$

y, usando (8), (7) y (6), vemos que esto es

$$\begin{aligned} &\leq \beta\big(|g(x_0)| + \alpha\varepsilon\big)\varepsilon + |f(x_0)|\alpha\varepsilon \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

en vista de la forma en que elegimos a α y a β . Así, la función p es continua en x_0.

(iii) Como f es continua en x_0 y $\frac{1}{2}|f(x_0)| > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$x \in A,\ |x - x_0| < \delta_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \tfrac{1}{2}|f(x_0)|.$$

Esto nos dice que si $x \in A$ y $|x - x_0| < \delta_0$ es

$$|f(x_0)| - |f(x)| \leq |f(x) - f(x_0)| < \tfrac{1}{2}|f(x_0)|,$$

de manera que

$$|f(x)| > \tfrac{1}{2}|f(x_0)| \tag{9}$$

y, como $f(x_0) \neq 0$, vemos que $f(x) \neq 0$. Podemos entonces considerar la función $h : x \in B_{\delta_0}(x_0) \to \frac{1}{f(x)} \in \mathbb{R}$.

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Como f es continua en x_0, existe $\delta \in (0, \delta_0)$ tal que

$$x \in A,\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0)|^2}{2}\varepsilon. \tag{10}$$

y entonces para cada $x \in A \cap B_\delta(x_0)$ tenemos que

$$|h(x) - h(x_0)| = \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right| = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|f(x)|\,|f(x_0)|} < \varepsilon,$$

en vista de (9) y (10). Esto prueba que la función h es continua en x_0. □

§3. Los teoremas de Weierstrass y Bolzano

3.1. Proposición. (Weierstrass) *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto compacto y $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $f(A)$ es un conjunto compacto.*

Demostración. Sea $(y_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $f(A)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A$ tal que $f(x_n) = y_n$ y, como A es compacto, la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ posee una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge a un punto $x_0 \in A$. Como f es continua en x_0, la Proposición 1.4 nos dice que la sucesión $(f(x_{n_k}))_{k\geq 1}$ converge a $f(x_0)$ y, como esta sucesión coincide con $(y_{n_k})_{k\geq 1}$, vemos que la sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ posee una subsucesión que converge a un punto de $f(A)$. Concluimos que $f(A)$ es compacto, como queríamos. □

3.2. Corolario. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto compacto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Existen $m, M \in A$ tales que $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ para todo $x \in A$.*

Demostración. De acuerdo a la Proposición 3.1, el conjunto $f(A)$ es compacto, así que es cerrado y acotado. En particular, $\inf A$ y $\sup A$ son elementos de $f(A)$, así que existen m, $M \in A$ tales que $f(m) = \inf f(A)$ y $f(M) = \sup f(A)$. El corolario sigue inmediatamente de esto. $\square$

3.3. Proposición. (Bolzano) *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a < b$ y $[a, b] \subseteq A$, entonces el intervalo cerrado con extremos $f(a)$ y $f(b)$ está contenido en $f\big([a, b]\big)$.*

Demostración. Supongamos que $f(a) \leq f(b)$, de manera que el intervalo cerrado con extremos $f(a)$ y $f(b)$ es $I = [f(a), f(b)]$; si tuviésemos, por el contrario, que $f(a) > f(b)$, el razonamiento sería completamente similar.

Sea $t \in [f(a), f(b)]$ y consideremos el conjunto $L = \{x \in [a, b] : f(x) \leq t\}$. Como L es claramente acotado y no vacío —ya que contiene a a— podemos considerar el número $\ell = \sup L$, que es un elemento de $[a, b]$.

Sabemos que existe una sucesión $(x_n)_{n\geq1}$ con valores en L que converge a ℓ. Como f es continua en ℓ, esto implica que la sucesión $(f(x_n))_{n\geq1}$ converge a $f(\ell)$. Para todo $n \geq 1$ es $x_n \in L$, de manera que $f(x_n) \leq t$, y entonces $f(\ell) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq t$.

Supongamos que $f(\ell) < t$. En particular, esto nos dice que $\ell \neq b$, así que existe $\rho > 0$ tal que $[\ell, \ell + \rho) \subseteq [a, b]$. Más aún, como en ese caso $\varepsilon = t - f(\ell) > 0$ y f es continua en ℓ, existe $\delta \in (0, \rho)$ tal que para cada $x \in A \cap B_\delta(\ell)$ es $f(x) \in B_\varepsilon(f(\ell))$. Es $\ell' = \ell + \frac{1}{2}\delta \in A \cap B_\delta(\ell)$, así que $f(\ell') < f(\ell) + \varepsilon = t$ y, en consecuencia, $\ell' \in L$: esto es absurdo porque $\ell' > \ell = \sup L$.

Concluimos así que debe ser $f(\ell) = t$ y, entonces, que $t \in f([a, b])$. $\square$

3.4. Proposición. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto y sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Si existe un conjunto $D \subseteq A$ tal que $\overline{D} \supseteq A$ y $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.*

Demostración. Sea $x \in A$ y sea $\varepsilon > 0$. Como las funciones f y g son continuas en x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A,\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad |g(x) - g(x_0)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{11}$$

Por otro lado, como $x_0 \in A \subseteq \overline{D}$, existe $x_1 \in D$ tal que $|x_1 - x_0| < \delta$. De (11), entonces, vemos que

$$|f(x_0) - g(x_0| \leq |f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - g(x_1)| + |g(x_1) - g(x_0)| < \varepsilon,$$

ya que $f(x_1) = g(x_1)$ por hipótesis. Como esto vale cualquiera sea ε, podemos concluir que $f(x_0) = g(x_0)$ y, en definitiva, que $f = g$. $\square$

3.5. Una aplicación importante de este resultado es la siguiente:

Proposición. *Sea* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *una función tal que para cada* $x, y\in\mathbb{R}$ *se tiene que*

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \tag{12}$$
$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y). \tag{13}$$

Entonces o bien f *es idénticamente nula o bien* $f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Demostración. Notemos que $f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)\cdot f(1)$, así que $f(1)=0$ o $f(1)=1$. En el primer caso tenemos que $f(x)=f(x\cdot 1)=f(x)\cdot f(1)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, de manera que f es idénticamente nula. Podemos suponer entonces que

$$f(1)=1. \tag{14}$$

Como $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$, tenemos que

$$f(0)=0. \tag{15}$$

De hecho, es cierto que si $z\in\mathbb{R}$ entonces

$$f(z)=0 \iff z=0. \tag{16}$$

Ya probamos que $f(0)=0$. Por otro lado, si $z\neq 0$ entonces existe $w\in\mathbb{R}$ tal que $z\cdot w=1$ y como $f(z)\cdot f(w)=f(z\cdot w)=f(1)=1$, debe ser $f(z)\neq 0$.

Observemos que

$$f(-x)=-f(x) \text{ para todo } x\in\mathbb{R}. \tag{17}$$

En efecto, si $x\in\mathbb{R}$, entonces $f(x)+f(-x)=f(x+(-x))=f(0)=0$, de acuerdo a (15), así que $f(-x)=-f(x)$, como afirma (17).

Afirmamos que

$$f(n)=n \text{ para todo } n\in\mathbb{N}. \tag{18}$$

En efecto, la ecuación (14) nos dice que esto es cierto si $n=1$; si, por otro lado, suponemos que es cierto para $n\in\mathbb{N}$, entonces $f(n+1)=f(n)+f(1)=n+1$ usando primero la hipótesis (12) y después la hipótesis inductiva y (14).

Mostremos ahora que

$$f(\tfrac{1}{n})=\tfrac{1}{n} \text{ para todo } n\in\mathbb{N}. \tag{19}$$

Para ello, notemos que si $n\in\mathbb{N}$ es

$$n\cdot f(\tfrac{1}{n})=f(n)\cdot f(\tfrac{1}{n})=f(n\cdot\frac{1}{n})=f(1)=1,$$

usando (18), (13) y luego (14), y que (19) sigue inmediatamente de esto. De (13), (18) y (19) vemos, a su vez, que si $m, n\in\mathbb{N}$ entonces

$$f(\tfrac{m}{n})=f(m\cdot\tfrac{1}{n})=f(m)\cdot f(\tfrac{1}{n})=m\cdot\tfrac{1}{n}=\tfrac{m}{n}.$$

En otras palabras, si $r \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$, entonces $f(r) = r$. Si en cambio $r \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0)$, usando (17) tenemos que $f(r) = -f(-r) = -(-r) = r$, ya que $-r \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$. Concluimos de esta forma que, de hecho,

$$f(r) = r \text{ para todo } r \in \mathbb{Q}.$$

La función f es estrictamente creciente: si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$, entonces existe $z \neq 0$ tal que $y = x + z^2$ y se sigue de esto que $f(y) = f(x + z^2) = f(x) + f(z)^2$ y, como $f(z) \neq 0$ por (16), que $f(x) < f(y)$.

Más aún, f es continua. Para verlo, sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y sea $\varepsilon > 0$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $x_0 - \frac{1}{n} < x < x_0 + \frac{1}{n}$, entonces como f es estrictamente creciente tenemos que

$$f(x_0) - f(\tfrac{1}{n}) = f(x_0 - \tfrac{1}{n}) < f(x) < f(x_0 + \tfrac{1}{n}) = f(x_0) + f(\tfrac{1}{n}),$$

de manera que $|f(x) - f(x_0)| < f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Sabemos a esta altura que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y que $f|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}|_{\mathbb{Q}}$, y la Proposición 3.4 nos dice entonces que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. □

§4. Funciones uniformemente continuas

4.1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es *uniformemente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in A, \ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

4.2. La uniforme continuidad es una condición más fuerte que la continuidad:

Proposición. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Si f es uniformemente continua, entonces f es continua.*

Demostración. Sea $x_0 \in A$ y mostremos que f es continua en x_0. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in A, \ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

En particular, si $x \in A$ y $|x - x_0| < \delta$ tenemos que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Esto prueba lo que queríamos. □

4.3. En general, una función continua no es uniformemente continua. Por ejemplo, la función $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ es continua pero no es uniformemente continua. Para verlo, es suficiente con observar que para cada $\delta \in (0, 1)$ los números $y = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{4}\delta$ y $x = y + \frac{1}{2}\delta$ son tales que $|x - y| < \delta$ y $|x^2 - y^2| \geq 1$.

Si suponemos que el dominio de la función es compacto, sin embargo, podemos probar la implicación recíproca a la de la Proposición 4.2:

4.4. Proposición. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto compacto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Supongamos, para llegar a un absurdo, que f no es uniformemente continua, de manera que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen x_n, $y_n \in A$ tales que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ y

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon. \tag{20}$$

La sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ toma valores en A, que es un conjunto compacto, así que existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ de aquélla que converge a un punto $x_0 \in A$. Como f es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A \cap B_\delta(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{21}$$

Por otro lado, como $(\frac{1}{n_k})_{k\geq 1}$ converge a 0 y $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ a x_0, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq K \implies \tfrac{1}{n_k} < \tfrac{1}{2}\delta, \quad |x_{n_k} - x_0| < \tfrac{1}{2}\delta.$$

Notemos que $|x_{n_K} - x_0| < \delta$ y

$$|y_{n_K} - x_0| \leq |y_{n_K} - x_{n_K}| + |x_{n_K} - x_0| < \tfrac{1}{n_K} + \tfrac{1}{2}\delta < \delta,$$

así que de (21) podemos deducir que $|f(x_{n_K}) - f(x_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ y $|f(y_{n_K}) - f(x_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon$, de manera que

$$|f(x_{n_K}) - f(y_{n_K})| \leq |f(x_{n_K}) - f(x_0)| + |f(y_{n_K}) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Esto contradice (20). □

4.5. Si $f : t \in (0, \infty) \mapsto \frac{1}{t} \in \mathbb{R}$, entonces la imagen de la sucesión $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$, que claramente satisface la condición de Cauchy, es la sucesión $(n)_{n\geq 1}$ que no la satisface. Esto muestra que una función continua no preserva la propiedad de satisfacer esa condición. La continuidad uniforme, en cambio, sí lo hace:

Proposición. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión con valores en A que satisface la condición de Cauchy, entonces la sucesión $(f(a_n))_{n\geq 1}$ también satisface la condición de Cauchy.*

Demostración. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión con valores en A que satisface la condición de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in A, \ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{22}$$

Por otro lado, como $(a_n)_{n\geq 1}$ satisface la condición de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \implies |a_n - a_m| < \delta.$$

Si ahora n, $m \in \mathbb{N}$ son tales que n, $m \geq 1$, esta última implicación nos dice que $|a_n - a_m| < \delta$ y entonces (22) nos permite concluir que $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$. Vemos así que la sucesión $(f(a_n))_{n\geq 1}$ satisface la condición de Cauchy. □

4.6. Proposición. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Si f es uniformemente continua, entonces existe una función $\bar{f} : \bar{A} \to \mathbb{R}$ que es uniformemente continua y tal que $\bar{f}|_A = f$.*

Demostración. Empecemos observando que

$$\text{si } (a_n)_{n\geq 1} \text{ es una sucesión convergente con valores en } A\text{, entonces la sucesión } (f(a_n))_{n\geq 1} \text{ converge.} \tag{23}$$

En efecto, si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una una sucesión con valores en A converge, entonces satisface la condición de Cauchy y la Proposición 4.5 nos dice que la sucesión $(f(a_n))_{n\geq 1}$ también la satisface: esto implica que $(f(a_n))_{n\geq 1}$ es una sucesión convergente.

Mostremos, en segundo lugar, que

$$\text{si } (a_n)_{n\geq 1} \text{ y } (a'_n)_{n\geq 1} \text{ son dos sucesiones con valores en } A \text{ que convergen al mismo punto } a \in \mathbb{R}\text{, entonces las sucesiones } (f(a_n))_{n\geq 1} \text{ y } (f(a'_n))_{n\geq 1} \text{ tienen el mismo límite.} \tag{24}$$

Para verlo, escribamos α y α' a los límites de $(f(a_n))_{n\geq 1}$ y de $(f(a'_n))_{n\geq 1}$, respectivamente, y sea $\varepsilon > 0$. Existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m \geq N_1 \implies |f(a_m) - \alpha| < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad |f(a'_m) - \alpha'| < \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in A,\ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \tag{25}$$

Finalmente, como las sucesiones $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(a'_n)_{n\geq 1}$ convergen a a, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N_2 \implies |a_n - a| < \tfrac{1}{2}\delta, \quad |a'_n - a| < \tfrac{1}{2}\delta. \tag{26}$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Como $N \geq N_2$, de (26) vemos que

$$|a_N - a'_N| \leq |a_N - a| + |a - a'_N| < \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{2}\delta = \delta,$$

Como además $a_N, a'_N \in A$, de (25) deducimos que $|f(a_N) - f(a'_N)| < \frac{1}{3}\varepsilon$, y entonces

$$|\alpha - \alpha'| \leq |\alpha - f(a_N)| + |f(a_N) - f(a'_N)| + |f(a'_N) - \alpha'| < \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon,$$

porque $N \geq N_1$ y en vista de (25). Esta desigualdad vale cualquiera sea $\varepsilon > 0$, asi que podemos concluir que $\alpha = \alpha'$ como queríamos mostrar.

Podemos definir ahora una función $\bar{f} : \bar{A} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera. Si $a \in \bar{A}$, entonces existe una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ con valores en A que converge a a. De acuerdo a (23), la sucesión $(f(a_n))_{n\geq 1}$ converge y de acuerdo a (24) el límite de esta sucesión depende únicamente de a y no de la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ elegida: podemos entonces poner $\bar{f}(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$.

Si $a \in A$, entonces la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ que tiene $a_n = a$ para todo $n \geq 1$ es una sucesión con valores en A que converge a a. En vista de la forma en que fue definida la función $\bar{f}$, tenemos que

$$\bar{f}(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a) = f(a).$$

Vemos así que $\bar{f}|_A = f$. Probemos ahora que $\bar{f}$ es una función uniformemente continua.

Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in A, \ |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{27}$$

Sean ahora x, $y \in \bar{A}$ tales que $|x-y| < \delta$; nos proponemos mostrar que

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| < \varepsilon. \tag{28}$$

Como x e y están en $\bar{A}$, existen sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ con valores en A que convergen a x y a y, respectivamente. En particular, como $\eta = \delta - |x-y|$ es un número positivo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies |x_n - x| < \tfrac{1}{2}\eta, \quad |y_n - y| < \tfrac{1}{2}\eta.$$

Se sigue de esto que si $n \geq N$ es

$$|x_n - y_n| \leq |x_n - x| + |x - y| + |y - y_n| < \tfrac{1}{\eta} + |x-y| + \tfrac{1}{2}\eta = \delta,$$

de manera que (27) implica que

$$|f(x_n) - f(y_n)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{29}$$

Por la forma en que la función $\bar{f}$ fue definida, las sucesiones $(f(x_n))_{n\geq 1}$ y $(f(y_n))_{n\geq 1}$ convergen a $\bar{f}(x)$ y a $\bar{f}(y)$, respectivamente. Tomando límite cuando $n \to \infty$ en (29) vemos entonces que $|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, y esto implica la desigualdad (28) que queríamos obtener.

Finalmente, para probar la unicidad supongamos que $g : \bar{A} \to \mathbb{R}$ es otra función continua tal que $g|_A = f$: que es $f = g$ es entonces una consecuencia inmediata de la Proposición 3.4 aplicada a nuestra a las funciones $\bar{f}$ y g con $D = A$. □

4.7. Una aplicación importante de la noción de continuidad uniforme y, en particular, de la Proposición 4.4, es el siguiente resultado:

Proposición. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua definida sobre un intervalo compacto, entonces f es integrable en el sentido de Riemann.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in [a,b], \ |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \tfrac{1}{b-a}\varepsilon. \tag{30}$$

Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ de malla menor que δ, de manera que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ y $0 < x_i - x_{i-1} < \delta$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Si $i \in \{1, \dots, n\}$, ponemos $F_i = \{f(x) : x \in [x_i, x_{i-1}]\}$, $m_i = \operatorname{ínf} F_i$ y $M_i = \sup F_i$; notemos que $M_i \geq m_i$.. Como la restricción $f|_{[x_i,x_{i-1}]} : [x_i, x_{i-1}] \to \mathbb{R}$ es continua, existen α_i, $\beta_i \in [x_i, x_{i-1}]$ tales que $m_i = f(\alpha_i)$ y $M_i = f(\beta_i)$. Como $|\alpha_i - \beta_i| \leq x_i - x_{i-1} < \delta$, de (30) deducimos que $M_i - m_i = |f(\alpha_i) - f(\beta_i)| \leq \frac{1}{b-a}\varepsilon$.

Se sigue de esto que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})M_i - \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) \\ &< \tfrac{1}{b-a}\,\varepsilon \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon,\end{aligned}$$

y entonces para las integrales inferior y superior de Darboux tenemos que

$$\overline{\int_a^b} f \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})M_i < \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f + \varepsilon.$$

Como siempre vale que $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$, concluimos que

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon.$$

La arbitrariedad de ε implica que, de hecho, es $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ y esto nos dice que f es integrable en $[a, b]$. $\square$