Variedades

Mariano Suárez-Alvarez

9 de mayo de 2015

I. Variedades 2
Atlas. Variedades. Ejemplos.

II. Funciones diferenciables 14
Funciones reales. Funciones entre variedades.

III. Espacios tangentes 18
Vectores y espacios tangentes. La diferencial de una función diferenciable. Campos tangentes. Variedades paralelizables. El fibrado tangente. Fibrados asociados al fibrado tangente.

IV. Orientabilidad 28
Espacios vectoriales. Variedades. Atlas orientados. Formas de volumen. El revestimiento doble de una variedad. Ejemplos.

V. Subvariedades 42
Inmersiones e incrustaciones. Subvariedades. Un resultado de inmersión. Ejemplos.

VI. Integrales 47

VII. Flujos 49
Dos aplicaciones.

VIII. Grupos de Lie 54
Grupos y homomorfismos. Campos invariantes. Ejemplos.

IX. Cohomología de de Rham 59
Definiciones y propiedades básicas. Invariancia homotópica. La sucesión exacta de Mayer-Vietoris. Ejemplos. Revestimientos regulares.

A. Un lema topológico 81

B. El teorema de la función inversa 83

Bibliografía 86

I. Variedades

{sect:variedades}

§1. Atlas

1.1.1. Si M es un espacio topológico, un ***atlas sobre M de dimensión n*** es una familia {p:def-atlas}

$$\mathscr{A} = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i\in I}$$

de funciones, a las que llamamos ***cartas***, tal que

- el conjunto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de M,
- para cada $i \in I$ la imagen $\phi_i(U_i)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i)$ es un homeomorfismo, y
- para cada $i, j \in I$, la composición

  $$\phi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\phi_i^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\phi_j} \phi_j(U_i \cap U_j)$$

  es diferenciable.

Notemos que la función $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ del tercer punto es biyectiva y que su función inversa es $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$. Se sigue de esto que, de hecho, $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ es un difeomorfismo.

1.1.2. Es inmediato que si $\mathscr{A}$ es un atlas sobre un espacio topológico M y $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}$ es un subconjunto tal que los dominios de sus elementos cubren M, entonces $\mathscr{A}'$ también es un atlas sobre M de la misma dimensión; en esta situación decimos que $\mathscr{A}'$ es un ***subatlas*** de $\mathscr{A}$. {p:subatlas}

1.1.3. Una ***carta global*** es una carta de un atlas sobre un espacio cuyo dominio es el espacio completo. Es claro que un espacio admite un atlas con una carta global sii es homeomorfo a un abierto de un espacio euclídeo. En efecto, si $n \geq 1$ y $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto y $\phi : M \to \mathbb{R}^n$ es la inclusión, $\mathscr{A} = \{\phi\}$ es un atlas sobre M.

1.1.4. Un atlas $\mathscr{A}$ sobre un espacio M es ***maximal*** si siempre que $\mathscr{A}'$ es otro atlas de dimensión n sobre M tal que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}'$ se tiene que de hecho $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$.

Si tenemos una familia $\{\mathscr{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de atlas sobre M totalmente ordenada para la inclusión, es inmediato verificar que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{A}_\lambda$ también es un atlas. El lema de Zorn, entonces, nos permite concluir que todo atlas está contenido en un atlas maximal. De hecho, trabajando un poco más podemos mostrar que ese atlas maximal está unívocamente determinado:

{lema:max}

Proposición. *Si M es un espacio topológico, todo atlas $\mathscr{A}$ sobre M está contenido en un único atlas maximal $\mathscr{A}^{\mathsf{max}}$ sobre M de la misma dimensión.*

Demostración. Sea $\mathscr{A} = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i\in I}$ un atlas sobre M de dimensión n y sea $\mathscr{A}^{\mathsf{max}}$ el conjunto de todas las funciones $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ tales que $\mathscr{A} \cup \{\phi\}$ es un atlas sobre M. Todo atlas que contiene a $\mathscr{A}$ está contenido en $\mathscr{A}^{\mathsf{max}}$, así que para probar el lema bastará que mostremos que $\mathscr{A}^{\mathsf{max}}$ es un atlas. Las dos primeras condiciones de la definición 1.1.1 se satisfacen por la forma en que construimos a $\mathscr{A}^{\mathsf{max}}$, así que solo nos queda verificar la tercera y, para esto, que

> *si $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : W \to \mathbb{R}^n$ son funciones tales que $\mathscr{A} \cup \{\phi\}$ y $\mathscr{A} \cup \{\psi\}$ son atlas sobre M, entonces la composición $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(V \cap W) \to V \cap W \to \psi(V \cap W)$ es diferenciable.*

Sean entonces ϕ y ψ funciones que satisfacen esa condición. Como se trata de homeomorfismos y $V \cap W$ es un abierto tanto de V como de W, la composición $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(V \cap W) \to \psi(V \cap W)$ es un homeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^n$, así que bastará que probemos que $\psi \circ \phi^{-1}$ es diferenciable.

Sea $i \in I$. Por hipótesis son difeomorfismos las composiciones

$$\phi(V \cap U_i) \xrightarrow{\phi^{-1}} V \cap U_i \xrightarrow{\phi_i} \phi_i(V \cap U_i)$$

y

$$\phi_i(W \cap U_i) \xrightarrow{\phi_i^{-1}} W \cap U_i \xrightarrow{\psi} \psi(W \cap U_i)$$

La primera se restringe a un difeomorfismo $\phi(V \cap W \cap U_i) \to \phi_i(V \cap W \cap U_i)$ y la segunda a uno $\phi_i(V \cap W \cap U_i) \to \psi(V \cap W \cap U_i)$, y la composición de estos es un difeomorfismo $\phi(V \cap W \cap U_i) \to \psi(V \cap W \cap U_i)$ que es la restricción a $\phi(V \cap W \cap U_i)$ de la composición

$$\phi(V \cap W) \xrightarrow{\phi^{-1}} V \cap W \xrightarrow{\psi} \psi(V \cap W)$$

Vemos así que esta última composición es diferenciable sobre cada uno de los abiertos del cubrimiento $\{V \cap W \cap U_i : i \in I\}$ de $V \cap W$, así que es ella misma diferenciable. □

1.1.5. El siguiente criterio es útil al comparar atlas:

{lema:comp}

Lema. *Dos atlas sobre un espacio topológico están contenidos en el mismo atlas maximal si y solamente si su unión es un atlas.*

Demostración. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{A}'$ dos atlas sobre un espacio topológico M. Si ambos están contenidos en un atlas maximal, este contiene a la unión $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ y es claro, entonces, de la observación 1.1.2 que esta unión es un atlas, ya que los dominios de sus elementos cubren M. La implicación recíproca es inmediata. □

1.1.6. Un atlas maximal es, en cierto sentido, un atlas que contiene todas las funciones que podría contener. Un ejemplo útil de esto es el del siguiente lema:

{lema:restriccion}

Lema. *Sea M un espacio y $\mathscr{A}$ un atlas maximal sobre M. Si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es una carta de $\mathscr{A}$ y $V \subseteq U$ es un abierto, entonces $\phi|_V : V \to \mathbb{R}^n$ es un elemento de $\mathscr{A}$.*

Demostración. Es suficiente que mostremos que $\mathscr{A} \cup \{\phi|_V\}$ es un atlas. Como ϕ es un homeomorfismo a su imagen y V es un abierto de U, la restricción $\phi|_V$ es un homeomorfismo a su imagen, que es abierto de $\mathbb{R}^n$. Las dos primeras condiciones de la definición son entonces inmediatas, y para verificar la tercera alcanza con mostrar que si $\psi : W \to \mathbb{R}^n$ es una carta de $\mathscr{A}$ entonces $\psi \circ \phi|_U^{-1} : \phi(V \cap W) \to \psi(V \cap W)$ y $\phi|_U \circ \psi^{-1} : \psi(V \cap W) \to \phi(V \cap W)$ son diferenciables: esto es claro, porque se trata de restricciones de $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap W) \to \psi(U \cap W)$ y $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap W) \to \phi(U \cap W)$, respectivamente. □

1.1.7. Este lema que acabamos de probar permite mostrar fácilmente la existencia de cartas sobre una variedad que satisfacen diversas condiciones. Por ejemplo, se sigue fácilmente de él que todo atlas maximal contiene un subatlas tal que los dominios de las cartas que contienen son conexos.

1.1.8. Proposición. *Si M es un espacio topológico y con base numerable y $\mathscr{A}$ es un atlas maximal sobre M, entonces existe un atlas $\mathscr{A}_0$ contenido en $\mathscr{A}$ que es numerable.*

Demostración. Si $\mathscr{A} = \{\phi_i : U_I \to \mathbb{R}^n\}_{i\in I}$, entonces $\{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de M y la hipótesis hecha sobre M implica que existe un subconjunto numerable $J \subseteq I$ tal que $\{U_i\}_{i\in J}$ también es un cubrimiento de M. Podemos poner entonces $\mathscr{A}_0 = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i\in J}$, ya que satisface las condiciones deseadas. □

§2. Variedades

1.2.1. Una ***variedad de dimensión*** n es un par $(M, \mathscr{A})$ en el que M es un espacio topológico Hausdorff y con base numerable y $\mathscr{A}$ es un atlas maximal de dimensión n sobre M. En general, escribiremos M en lugar de $(M, \mathscr{A})$, dejando a $\mathscr{A}$ sobreentendido.

La Proposicion 1.1.4 implica que para especificar la segunda componente de una variedad $(M, \mathscr{A})$ alcanza con dar un atlas $\mathscr{A}_0$ contenido en $\mathscr{A}$, ya que $\mathscr{A}$ queda unívocamente determinado por $\mathscr{A}_0$. Es en este contexto que el criterio del Lema 1.1.5 se torna útil.

1.2.2. Proposición. *Sea $(M, \mathscr{A})$ una variedad de dimensión n y sea $N \subseteq M$ un abierto. El conjunto $\mathscr{A}'$ de cartas de $\mathscr{A}$ cuyo dominio está contenido en N es un atlas sobre N de dimensión n y el par $(N, \mathscr{A}'^{\max})$ es una variedad diferenciable.*

De hecho, el atlas $\mathscr{A}'$ es él mismo maximal, pero no necesitaremos esto. Siempre que veamos a un abierto de una subvariedad como una variedad será con respecto a la estructura de variedad construida en este lema. En particular, usando el lema anterior, hemosdotado de una estructura canónica de variedad a los abiertos de los espacios vectoriales reales de dimensión finita.

Demostración. El abierto N es claramente un espacio Hausdorff y con base numerable cuando lo dotamos con la topología inducida por M, así que tenemos que probar solamente que $\mathscr{A}'$ es un atlas. Como $\mathscr{A}$ es un atlas, para ver que $\mathscr{A}'$ es un atlas alcanza con mostrar que los dominios de las cartas de $\mathscr{A}'$ cubren a N. Ahora bien, sabemos del Lema 1.1.6 que si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ está en $\mathscr{A}$ también lo está $\phi|_{U\cap V} : U \cap V \to \mathbb{R}^n$, así que lo que queremos sigue inmediatamente de que los dominios de las funciones de $\mathscr{A}$ cubren M. □

{prop:cartesiano}

1.2.3. Proposición. *Sean $(M, \mathscr{A})$ y $(N, \mathscr{A}')$ dos variedades de dimensión m y n, respectivamente, y supongamos que $\mathscr{A} = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^m\}$ y $\mathscr{A}' = \{\psi_j : V_j \to \mathbb{R}^n\}$. El conjunto*

$$\mathscr{A}'' = \{\phi_i \times \psi_j : U_i \times V_j \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n\}_{(i,j)\in I\times J}$$

es un atlas de dimensión $m + n$ sobre el espacio topológico producto $M \times N$ y el par $(M \times N, \mathscr{A}''^{\max})$ es una variedad.

Por supuesto, este resultado se generaliza sin problemas a productos cartesianos de un número arbitrario de variedades.

Demostración. Es claro que $\{U_i \times U_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ es un cubrimiento abierto del espacio producto $M \times N$. Además, como el producto cartesiano de dos homeomorfismos es un homeomorfismo, las funciones de $\mathscr{A}''$ son homeomorfismos sobre abiertos de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Finalmente, si $(i,j), (i',j') \in I \times J$, claramente

$$(U_i \times V_j) \cap (U_{i'} \times V_{j'}) = (U_i \cap U_{i'}) \times (V_j \cap V_{j'}),$$
$$(\phi_i \times \psi_j)\big((U_i \times V_j) \cap (U_{i'} \times V_{j'})\big) = \phi_i(U_i \cap U_{i'}) \times \psi_j(V_j \cap V_{j'})$$

y

$$(\phi_{i'} \times \psi_{j'})\big((U_i \times V_j) \cap (U_{i'} \times V_{j'})\big) = \phi_{i'}(U_i \cap U_{i'}) \times \psi_{j'}(V_j \cap V_{j'}),$$

y la composición

$$(\phi_i \times \psi_j)\big((U_i \times V_j) \cap (U_{i'} \times V_{j'})\big) \xrightarrow{(\phi_{i'}\times\psi_{j'})\circ(\phi_i\times\psi_j)^{-1}} (\phi_{i'} \times \psi_{j'})\big((U_i \times V_j) \cap (U_{i'} \times V_{j'})\big)$$

es la función

$$\phi_i(U_i \cap U_{i'}) \times \psi_j(V_j \cap V_{j'}) \xrightarrow{(\phi_{i'}\circ\phi_i^{-1})\times(\psi_{j'}\circ\psi_j^{-1})} \phi_{i'}(U_i \cap U_{i'}) \times \psi_{j'}(V_j \cap V_{j'}),$$

que es evidentemente diferenciable. Esto prueba que $\mathscr{A}''$ es un atlas sobre $M \times N$ de dimensión $n+m$. Como $M \times N$ es un espacio Hausdorff y con base numerable, vemos que $(M \times N, \mathscr{A}''^{\max})$ es una variedad. $\square$

1.2.4. La siguiente proposición codifica un procedimiento extremadamente útil para contruir variedades. {prop:construccion}

Proposición. *Sea X un conjunto, sea $n \geq 1$, sea $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento de X y consideremos una familia $\mathscr{A} = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i\in I}$ de funciones. Supongamos que:*

- *para cada $i \in I$ la función ϕ_i es inyectiva y su imagen es un abierto de $\mathbb{R}^n$;*
- *para cada $i, j \in I$ el conjunto $\phi_i(U_i \cap U_j)$ es un abierto de $\phi_i(U_i)$ y la composición*

$$\phi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\phi_i^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\phi_j} \phi_j(U_i \cap U_j)$$

  es un diferenciable;
- *para cada $i, j \in I$ el conjunto*

$$\Delta_{i,j} = \{(a,b) \in \phi_i(U_i) \times \phi_j(U_j) : \phi_i^{-1}(a) = \phi_j^{-1}(b)\}$$

  es un cerrado de $\phi_i(U_i) \times \phi_j(U_j)$;
- *$\mathscr{U}$ contiene un subcubrimiento numerable.*

Entonces existe exactamente una topología sobre el conjunto X que hace de él un espacio Hausdorff y con base numerable y para la que $\mathscr{A}$ es un atlas.

Demostración. Para cada $i \in I$ sea $Y_i = \phi_i(U_i)$, dotado de su topología de subespacio de $\mathbb{R}^n$, y sea f_i la composición

$$Y_i \xrightarrow{\phi_i^{-1}} U_i \hookrightarrow X$$

Si $i \in I$, la función f_i es inyectiva y U_i es su imagen. Si $i, j \in I$, entonces $f_i^{-1}(U_j) = \phi_i(U_i \cap U_j)$ y esto es, por hipótesis, un abierto de Y_i. Por otro lado, la composición

$$f_i^{-1}(U_j) \xrightarrow{f_i} U_i \cap U_j \xrightarrow{f_j^{-1}} f_j^{-1}(U_i)$$

es la función $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$, que es un homeomorfismo.

La Proposición 1.0.19 nos dice que hay sobre X una única topología que hace de $\mathscr{U}$ un cubrimiento abierto de X y de los elementos del conjunto $\mathscr{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ homeomorfismos con sus imagenes. Si $i, j \in I$, entonces el conjunto

$$\{(a, b) \in Y_i \times Y_j : f_i(a) = f_j(b)\}$$

coincide con el conjunto $\Delta_{i,j}$ del enunciado, que es un cerrado de $Y_i \times Y_j$, así que la Proposición 1.0.20 implica que la topología de X es Hausdorff. Como estamos suponiendo que $\mathscr{U}$ contiene un subcubrimiento numerable, de la Proposición 1.0.21 sabemos que X tiene una base numerable. Finalmente, para ver que el conjunto $\mathscr{A}$ es un atlas sobre X queda solamente verificar la tercera condición de la definición 1.1.1, pero ésta es parte de nuestra hipótesis. □

§3. Ejemplos

Espacios vectoriales

1.3.1. Sea V es espacio vectorial real de dimensión finita n. Si $B = (v_1, \dots, v_n)$ es una base ordenada de V, sea $B^* = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la base dual y {p:vect}

$$\phi_B : x \in V \mapsto (\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $\mathscr{B}$ el conjunto de las bases ordenadas de V y $\mathscr{A} = \{\phi_B\}_{B \in \mathscr{B}}$.

Lema. *Hay una única topología sobre V que hace que todas las funciones de $\mathscr{A}$ sean homeomorfismos y para esa topología el conjunto $\mathscr{A}$ es un atlas de dimensión n.*

Si dotamos a V de esa topología, que es claramente Hausdorff y tiene una base numerable, entonces $(V, \mathscr{A}^{\mathsf{max}})$ es una variedad. Decimos que esta estructura de variedad sobre V es su estructura canónica y siempre que veamos a V como variedad será con respecto a ella.

Demostración. Como todas las funciones de $\mathscr{A}$ son biyectivas, hay a lo sumo una topología sobre V que hace que todas ellas sean homeomorfismos. Para ver que hay al menos una alcanza con mostrar que si B, $B' \in \mathscr{B}$ entonces la composición $\phi_{B'} \circ \phi_B^{-1} : \mathbb{R}^n \to V \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, y esto es claro ya que se trata de una función lineal biyectiva. Más aún, como esta composición es lineal es diferenciable, y entonces la tercera condición de la definición 1.1.1 se cumple. Las dos primeras son inmediatas, así que $\mathscr{A}$ es un atlas. □

Esferas

1.3.2. Sea $n \geq 1$ y consideremos el subespacio $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, que es Hausdorff y tiene una base numerable. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in S^n$, escribimos $x' = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e identificamos, por comodidad, a x con el par (x', x_{n+1}). Sean $I = \{+1, -1\}$ y, si $i \in I$, sean $P_i = (0, \dots, 0, i) \in S^n$, $U_i = S^n \setminus \{P_i\}$ y {p:esferas:1}

$$\phi_i : (x', x_{n+1}) \in U_i \longmapsto \frac{x'}{1 - ix_{n+1}} \in \mathbb{R}^n.$$

Es claro que ϕ_i es continua, porque es la restricción a U_i de la función continua dada por la misma expresión pero definida sobre el abierto $\{x \in \mathbb{R}^n : ix_{n+1} < 1\}$. Por otro lado, consideremos la función

$$\psi_i : y \in \mathbb{R}^n \longmapsto \left(\frac{2y}{\|y\|^2 + 1}, i\,\frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right) \in U_i.$$

Si $y \in \mathbb{R}^n$, es $\|\psi_i(y)\| = 1$ y $i\,\frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1} \neq i$, así que la imagen de ψ_i está contenida en U_i, y en consecuencia ψ_i está bien definida; es claro, además, que se trata de una función continua. Un cálculo directo muestra que ϕ_i y ψ_i son funciones inversas, asi que se trata de homeomorfismos. Para ver que $\mathscr{A} = \{\phi_{+1}, \phi_{-1}\}$ es un atlas resta entonces verificar la tercera condición de la definición. Sea $i \in I$. Es $U_i \cap U_{-i} = S^n \setminus \{P_i, P_{-i}\}$ y $\phi_i(U_i \cap U_{-i}) = \phi_i(U_i) \setminus \{\phi_i(P_{-i})\} = \mathbb{R}^n \setminus 0$, y, calculándola explícitamente, vemos que

$$\phi_{-i} \circ \phi_i : y \in \phi_i(U_i \cap U_{-1}) \longmapsto \frac{y}{\|y\|^2} \in \phi_{-i}(U_i \cap U_{-1}),$$

que es claramente diferenciable, como queríamos.

En conclusión, $\mathscr{A}$ es un atlas sobre S^n y $(S^n, \mathscr{A}^{\mathsf{max}})$ es una estructura de variedad sobre S^n. Siempre que vamos a S^n como variedad será con respecto a esta estructura.

Espacios proyectivos

1.3.3. Sea $n \geq 1$, sea $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ y consideremos sobre el conjunto X la relación $\sim$ tal que si $x, y \in X$, es

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0 : \lambda x = y.$$

Se trata de una relación de equivalencia, así que podemos considerar el conjunto cociente $\mathbb{RP}^n = X/{\sim}$. Si $x = (x_0, \dots, x_n) \in X$, escribimos $(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{RP}^n$ a la clase de equivalencia de x. Pongamos $I = \{0, \dots, n\}$.

1.3.4. Sea $i \in I$. Si $x = (x_0, \dots, x_n)$, $y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ son tales que $x \sim y$, entonces

$$x_i = 0 \iff y_i = 0,$$

así que tiene sentido el conjunto

$$U_i = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{RP}^n : x_i \neq 0\}.$$

Consideremos la función $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ tal que para cada $(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{R}\mathsf{P}^n$ es

$$\phi_i(x_0 : \cdots : x_n) = \Big(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\Big).$$

Esto está bien definido: si $x = (x_0, \dots, x_n)$, $y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ son tales que $x \sim y$, entonces

$$\Big(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\Big) = \Big(\frac{y_0}{y_i}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \dots, \frac{y_n}{y_i}\Big).$$

Un cálculo directo muestra que

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto (x_1 : \cdots : x_i : 1 : x_{i+1} : \cdots : x_n) \in \mathbb{R}\mathsf{P}^n$$

es la función inversa de ϕ_i, así que, en particular, ϕ_i es una biyección.

1.3.5. Sean ahora $i, j \in I$ y supogamos que $i < j$.

- Es $U_i \cap U_j = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{R}\mathsf{P}^n : x_i x_j \neq 0\}$ y entonces

  $$\phi_i(U_i \cap U_j) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j \neq 0\}$$

  y

  $$\phi_j(U_i \cap U_j) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{i+1} \neq 0\},$$

  que son abiertos de $\phi_i(U_i) = \mathbb{R}^n$ y de $\phi_j(U_j) = \mathbb{R}^n$, respectivamente.
- La composición $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ es

  $$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \Big(\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_i}{x_j}, \frac{1}{x_j}, \frac{x_{i+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\Big),$$

  que es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^n$. Lo mismo es cierto de la composición $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j)$, que es

  $$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \Big(\frac{x_1}{x_{i+1}}, \dots, \frac{x_i}{x_{i+1}}, \frac{x_{i+2}}{x_{i+1}}, \dots, \frac{x_j}{x_{i+1}}, \frac{1}{x_{i+1}}, \frac{x_{j+1}}{x_{i+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{i+1}}\Big).$$
- Si $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, es

  $$\begin{aligned}
  &\phi_i^{-1}(x) = \phi_j^{-1}(y) \\
  &\qquad \iff (x_1 : \cdots : x_i : 1 : x_{i+1} : \cdots : x_n) = (y_1 : \cdots : y_j : 1 : y_{j+1} : y_n) \\
  &\qquad \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0 : \begin{cases} \lambda x_l = y_l, & \text{si } 1 \le l \le i \text{ o si } j+1 \le l \le n; \\ \lambda x_l = y_{l+1}, & \text{si } i < l < j; \\ \lambda = y_{i+1}; \\ \lambda x_j = 1 \end{cases} \\
  &\qquad \iff \begin{cases} y_{i+1} x_l = y_l, & \text{si } 1 \le l \le i \text{ o si } j+1 \le l \le n; \\ y_{i+1} x_l = y_{l+1}, & \text{si } i < l < j; \\ y_{i+1} x_j = 1 \end{cases}
  \end{aligned}$$

  y esta última condición es *cerrada*, así que el conjunto

  $$\Delta_{i,j} = \{(x, y) \in \phi_i(U_i) \times \phi_j(U_j) : \phi_i^{-1}(x) = \phi_j^{-1}(y)\}$$

  es un cerrado de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

1.3.6. Estamos en las condiciones de la Proposición 1.2.4. Existe entonces una única topología Hausdorff y con base numerable sobre $\mathbb{R}\mathsf{P}^n$ que hace que las funciones $\{\phi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\mathsf{P}^n\}_{i\in I}$ sean homeomorfismos sobre sus imágenes, que resultan abiertos de $\mathbb{R}\mathsf{P}^n$, y para la que el conjunto el conjunto $\mathscr{A} = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i\in I}$ es un atlas sobre $\mathbb{R}\mathsf{P}^n$ de dimensión n. Llamamos a la variedad $(\mathbb{R}\mathsf{P}^n, \mathscr{A}^{\mathsf{max}})$ el *espacio proyectivo real* de dimensión n.

Variedades grassmanianas

1.3.7. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, sea $k \in \{1, \dots, n\}$ y sea $\mathsf{Gr}_k(V)$ el conjunto de todos los subespacios de V de dimensión k. Nos proponemos dotar a $\mathsf{Gr}_k(V)$ de una estructura natural de variedad usando, otra vez, la Proposición 1.2.4. En detalle, construiremos un conjunto I y una familia de funciones inyectivas $\mathscr{F} = \{\phi_i : M_{k,n-k}(\mathbb{R}) \to \mathsf{Gr}_k(V)\}_{i\in I}$ definidas en el espacio de las matrices reales $k \times (n-k)$ tales que

- si para cada $i \in I$ ponemos $U_i = \operatorname{im} \phi_i$, el conjunto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento de $\mathsf{Gr}_k(V)$ que contiene subcubrimientos finitos;
- si $i, j \in I$, entonces $\phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ es un abierto de $M_{k,n-k}(\mathbb{R})$ y la función
$$\phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \to \phi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$
es un difeomorfismo; y
- para cada $i, j \in I$, el conjunto
$$\Delta_{i,j} = \{(\lambda, \mu) \in M_{k,n-k}(\mathbb{R}) \times M_{k,n-k}(\mathbb{R}) : \phi_i(\lambda) = \phi_j(\mu)\}$$
es un cerrado de $M_{k,n-k}(\mathbb{R}) \times M_{k,n-k}(\mathbb{R})$.

La familia $\mathscr{A} = \{\phi_i^{-1} : U_i \to M_{k,n-k}(\mathbb{R})\}_{i\in I}$, entonces, satisfará las condiciones de la Proposición 1.2.4 y, en consecuencia, habremos probado que $\mathsf{Gr}_k(V)$ puede hacerse de una única forma un espacio topológico de manera que $\mathscr{A}$ sea un atlas sobre él y $(M, \mathscr{A}^{\mathsf{max}})$ una variedad, a la que llamamos *grassmaniana de subespacios de dimensión k en V*.

1.3.8. Sea I el conjunto de bases ordenadas de V. Si $i = (v_1, \dots, v_n) \in I$, consideramos los subespacios $C_i = \langle v_1, \dots, v_k\rangle$ y $D_i = \langle v_{k+1}, \dots, v_n\rangle$, de manera que $V = C_i \oplus D_i$, y denotamos $\pi_{i,1} : V \to C_i$ y $\pi_{i,2} : V \to D_i$ a las proyecciones canónicas correspondientes a esta descomposición de V. Si además $\lambda \in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$, sea $\lambda^i : C_i \to D_i$ la única función lineal cuya matriz con respecto a las bases ordenadas $(v_1, \dots, v_k)$ y $(v_{k+1}, \dots, v_n)$ de C_i y de D_i, respectivamente, es precisamente λ; sabemos que la función $\lambda \in M_{k,n-k}(\mathbb{R}) \mapsto \lambda^i \in \mathsf{hom}(C_i, D_i)$ es un isomorfismo lineal.

1.3.9. Fijemos $i \in I$. Para cada $\lambda \in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$ la función {p:phii}

$$\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i : v \in C_i \mapsto v + \lambda^i(v) \in V$$

es inyectiva (porque la composición $\pi_{i,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)$ es la identidad de C_i) así que su imagen $\mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)$ es un elemento de $\mathsf{Gr}_k(V)$. Tenemos así definida una función

$$\phi_i : \lambda \in M_{k,n-k}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) \in \mathsf{Gr}_k(V).$$

Esta función ϕ_i es inyectiva. En efecto, si $\lambda \in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$, es claro que para cada $v \in C_i$ el vector $\lambda^i(v) \in D_i$ es el único elemento w de D_i tal que $v + w \in \phi_i(\lambda)$, así que el subespacio $\phi_i(\lambda)$ determina a λ^i y, entonces, a λ.

1.3.10. Escribamos U_i a la imagen de ϕ_i. Afirmamos que

$$U_i = \{S \in \mathrm{Gr}_k(V) : S \cap D_i = 0\}. \tag{1}$$ {eq:grui}

En efecto:

- Si $\lambda \in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$ e $\mathrm{im}(\mathrm{id}_{C_i} + \lambda^i) \cap D_i \neq 0$, hay un vector no nulo $v \in C_i$ tal que $v + \lambda^i(v) \in D_i$, lo que es imposible. Esto nos dice que U_i está contenido en el miembro derecho de la igualdad (1).
- Para probar la inclusión recíproca, sea $S \in \mathrm{Gr}_k(V)$ tal que $S \cap D_i = 0$. Como $D_i = \ker \pi_{i,1}$, la restricción $\pi_{i,1}|_S : S \to C_i$ es inyectiva y entonces — como su dominio y codominio tienen la misma dimensión — es, de hecho, un isomorfismo. Hay exactamente una matriz $\lambda \in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$ tal que $\lambda^i = \pi_{i,2} \circ (\pi_{i,1}|_S)^{-1} : C_i \to D_i$. La imagen de $\mathrm{id}_{C_i} + \lambda^i$ contiene a S: si $s \in S$ y ponemos $v = \pi_{i,1}(s)$, entonces $(\mathrm{id}_{C_i} + \lambda^i)(v) = \pi_{i,1}(s) + \pi_{i,2}(s) = s$; como $\mathrm{im}(\mathrm{id}_{C_i} + \lambda^i)$ y S tienen la misma dimensión, vemos que son iguales y, en definitiva, que S esta en U_i.

Notemos que este último punto muestra que la función inversa de ϕ_i es tal que

$$\left(\phi_i^{-1}(S)\right)^i = \pi_{i,2} \circ (\pi_{i,1}|_S)^{-1} \tag{2}$$ {eq:gr-inv}

para cada $S \in U_i$.

1.3.11. El conjunto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento de $\mathrm{Gr}_k(V)$: si $S \in \mathrm{Gr}_k(V)$, existe una base ordenada $i = (v_1 \dots, v_n)$ de V tal que $S = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, y entonces $S = \phi_i(0) \in U_i$.

Fijemos una base ordenada $(v_1, \dots, v_n)$ de V y para cada permutación $\pi \in S_n$ pongamos $i_\pi = (v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n)}) \in I$. Queremos probar que $\{U_{i_\pi} : \pi \in S_n\}$ también cubre a $\mathrm{Gr}_k(V)$ y, en particular, que $\mathscr{U}$ contiene subcubrimientos finitos.

Sea $S \in \mathrm{Gr}_k(V)$ y sea $p : V \to V/S$ la proyección canónica. El conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera a V, así que su imagen $\{p(v_1), \dots, p(v_n)\}$ genera a V/S. Como $\dim V/S = n - k$, hay índices $i_1, \dots, i_{n-k} \in \{1 \dots, n\}$ tales que $\{p(v_{i_1}), \dots, p(v_{i_{n-k}})\}$ es una base de V/S y, entonces, $S \cap \langle v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-k}} \rangle = 0$. Si $\pi \in S_n$ es cualquier permutación tal que $\pi(t) = i_{t-k}$ para cada $t \in \{k+1, \dots, n\}$, entonces tenemos que $S \cap D_{i_\pi} = 0$ y, en consecuencia, $S \in U_{i_\pi}$. Que $\mathrm{Gr}_k(V) = \bigcup_{\pi \in S_n} U_{i_\pi}$ sigue inmediatamente de esto.

1.3.12. Sean $i = (v_1, \dots, v_n)$, $j = (w_1, \dots, w_n) \in I$, y supongamos que $v_r = \sum_{s=1}^n \alpha_{r,s} w_s$ para cada $r \in \{1, \dots, n\}$. De acuerdo a (1), es {p:grinv}

$$U_i \cap U_j = \{S \in \mathrm{Gr}_k(V) : S \cap D_i = S \cap D_j = 0\}.$$

Si $\lambda \in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} &\lambda \in \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \\ &\qquad \iff D_j \cap \mathrm{im}(\mathrm{id}_{C_i} + \lambda^i) = 0 \\ &\qquad \iff \ker \pi_{j,1} \cap \mathrm{im}(\mathrm{id}_{C_i} + \lambda^i) = 0 \\ &\qquad \iff \pi_{j,1} \circ (\mathrm{id}_{C_i} + \lambda^i) : C_i \to C_j \text{ es un isomorfismo,} \end{aligned}$$

así que

$$\phi_i^{-1}(U_i \cap U_j) = \{\lambda \in M_{k,n-k}(\mathbb{R}) : \pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) : C_i \to C_j \text{ es un isomorfismo}\} \tag{3}$$ {eq:grtt}

Sea $\lambda = (\lambda_{r,s}) \in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$. La función $\lambda^i : C_i \to D_i$ es tal que $\lambda^i(v_r) = \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s} v_{k+s}$ para todo $r \in \{1, \dots, k\}$, así que para esos valores de r es

$$\begin{aligned}
\big(\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)\big)(v_r) &= \pi_{j,1}\Big(v_r + \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s} v_{k+s}\Big) \\
&= \pi_{j,1}\Big(\sum_{t=1}^{n} \beta_{r,t} w_t + \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s} \sum_{t=1}^{n} \beta_{k+s,t} w_t\Big) \\
&= \pi_{j,1}\Big(\sum_{t=1}^{n} \Big[\beta_{r,t} w_t + \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s} \beta_{k+s,t}\Big] w_t\Big) \\
&= \sum_{t=1}^{k} \Big[\beta_{r,t} + \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s} \beta_{k+s,t}\Big] w_t.
\end{aligned}$$

La matriz de $\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) : C_i \to C_j$ con respecto a las bases $(v_1, \dots, v_k)$ de C_i y $(w_1, \dots, w_k)$ de C_j es, entonces,

$$\Big(\beta_{r,t} + \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s} \beta_{k+s,t}\Big)_{\substack{1 \le r \le k \\ 1 \le t \le k}}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}
&\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) : C_i \to C_j \text{ es un isomorfismo} \\
&\qquad \iff \det\Big(\beta_{r,t} + \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s} \beta_{k+s,t}\Big)_{\substack{1 \le r \le k \\ 1 \le t \le k}} \neq 0.
\end{aligned} \tag{4}$$ {eq:gr-cond}

Como el determinante de una matriz es un polinomio en sus coeficientes, es una función continua de ellos, y como los coeficientes de la matriz que aparece en (4) dependen continuamente de λ, podemos concluir de (3) que el conjunto $\phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ es un abierto de $M_{k,n-k}(\mathbb{R})$.

1.3.13. Afirmamos que la función $\phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \to \phi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$ es tal que para cada $\lambda \in \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ es

$$\Big((\phi_j^{-1} \circ \phi_i)(\lambda)\Big)^j = \pi_{j,2} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) \circ \big(\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)\big)^{-1} \tag{5}$$ {eq:phiji}

En efecto, usando directamente la definición de ϕ_i y la expresión (2) para la inversa de ϕ_j, calculamos que

$$\Big((\phi_j^{-1} \circ \phi_i)(\lambda)\Big)^j = \pi_{j,2} \circ \big(\pi_{j,1}|_{\mathsf{im}(\mathsf{id}_{V_0} + \lambda)}\big)^{-1}. \tag{6}$$ {eq:phiji:1}

Ahora bien, es inmediato que

$$\mathsf{id}_{C_j} = \pi_{j,1}|_{\mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) \circ \big(\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)\big)^{-1}$$

y, multiplicando a izquierda por $\pi_{j,2} \circ \big(\pi_{j,1}|_{\mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_i}+\lambda^i)}\big)^{-1}$ ambos miembros de esta igualdad, vemos que

$$\pi_{j,2} \circ \big(\pi_{j,1}|_{\mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_i}+\lambda^i)}\big)^{-1} = \pi_{j,2} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) \circ \big(\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)\big)^{-1}.$$

Usando esto para reescribir el miembro derecho de (6), obtenemos (5), como queríamos.

Si $\lambda \in \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$, la matriz de $\big(\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)\big)^{-1} : C_j \to C_i$ con respecto a las bases $(w_1, \dots, w_k)$ y $(v_1, \dots, v_k)$ de C_j y de C_i, respectivamente, es, de acuerdo a lo que hicimos en 1.3.12,

$$(\xi_{r,s})_{\substack{1\leq r\leq k\\ 1\leq t\leq k}} = \Big(\beta_{r,t} + \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s}\beta_{k+s,t}\Big)^{-1}_{\substack{1\leq r\leq k\\ 1\leq t\leq k}}$$

y entonces son coeficientes son funciones diferenciables de $\lambda \in \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$. Para cada $r \in \{1, \dots, k\}$ es

$$\big(\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)\big)^{-1}(w_r) = \sum_{s=1}^{k} \xi_{r,s} v_s$$

así que

$$\begin{aligned}
\Big[(\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) \circ \big(\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)\big)^{-1}\Big](w_r) &= (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)\Big(\sum_{s=1}^{k} \xi_{r,s} v_s\Big) \\
&= \sum_{s=1}^{k} \xi_{r,s}\Big(v_s + \sum_{t=1}^{n-k} \lambda_{s,t} v_{k+t}\Big) \\
&= \sum_{l=1}^{n}\Bigg[\sum_{s=1}^{k} \xi_{r,s}\alpha_{s,l} + \sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{n-k} \xi_{r,s}\lambda_{s,t}\alpha_{k+t,l}\Bigg] w_l
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&\Big[\pi_{j,2} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i) \circ \big(\pi_{j,1} \circ (\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)\big)^{-1}\Big](w_r) \\
&\qquad = \sum_{l=k+1}^{n}\Bigg[\sum_{s=1}^{k} \xi_{r,s}\alpha_{s,l} + \sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{n-k} \xi_{r,s}\lambda_{s,t}\alpha_{k+t,l}\Bigg] w_l.
\end{aligned}$$

De acuerdo a (5), esto nos dice que

$$(\phi_j^{-1} \circ \phi_i)(\lambda) = \Bigg(\sum_{s=1}^{k} \xi_{r,s}\alpha_{s,k+l} + \sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{n-k} \xi_{r,s}\lambda_{s,t}\alpha_{k+t,k+l}\Bigg)_{\substack{1\leq r\leq k\\ 1\leq l\leq n-k}}$$

e implica que la función $\phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \to \phi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$ es diferenciable. Como su inversa es $\phi_i^{-1} \circ \phi_j$, vemos que de hecho es un difeomorfismo.

1.3.14. Sean λ, $\mu \in M_{k,n-k}(\mathbb{R})$. Si $r \in \{1, \dots, k\}$, es

$$(\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)(v_r) = v_r + \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s} v_{k+s} = \sum_{t=1}^{n}\Big[\alpha_{r,t} + \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s}\alpha_{k+s,t}\Big] w_t$$

y

$$(\mathsf{id}_{C_j} + \mu^j)(w_r) = w_r + \sum_{s=1}^{n-k} \mu_{r,s} w_{k+s},$$

así que los subespacios $\mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_i} + \lambda^i)$ e $\mathsf{im}(\mathsf{id}_{C_j} + \mu^j)$ están generados por los conjuntos

$$\left\{ \sum_{t=1}^{n} \left[\alpha_{r,t} + \sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s} \alpha_{k+s,t} \right] w_t : 1 \le r \le k \right\} \tag{7}$$ {eq:graa}

y

$$\left\{ w_r + \sum_{s=1}^{n-k} \mu_{r,s} w_{k+s} : 1 \le r \le k \right\} \tag{8}$$ {eq:grbb}

respectivamente. Los dos subespacios tienen la misma dimensión k, así que coinciden si y solamente si la unión de estos dos subconjuntos genera un espacio de dimensión k. Si definimos una matriz $f = (f_{t,r}) \in M_{n,2k}(\mathbb{R})$ poniendo

$$f_{t,r} = \begin{cases} \alpha_{r,t} + \displaystyle\sum_{s=1}^{n-k} \lambda_{r,s} \alpha_{k+s,t}, & \text{si } 1 \le s \le j; \\ \delta_{t,r-k}, & \text{si } 1 \le t \le k \text{ y } k+1 \le r \le n; \\ \mu_{r-k,t-k}, & \text{si } k+1 \le t, r \le n, \end{cases}$$

entonces las primeras k columnas de f son las coordenadas en la base j de los vectores del conjunto (7), las últimas k son las coordenadas en esa misma base de los vectores del conjunto (8), y es claro que la unión de los dos conjuntos (7) y (8) genera un subespacio de dimensión k si y solamente si el rango de la matriz f es exactamente k. Como sabemos que las primeras k columnas de f son linealmente independientes, el rango de f es k si y solamente si se anulan todos los menores de tamaño $k+1$, y esta última condición es equivalente a la anulación de $\binom{2k}{k+1}\binom{n}{k+1}$ polinomios en los coeficientes de f. Como claramente los coeficientes de f dependen continuamente de λ y de μ, vemos que el conjunto

$$\Delta_{i,j} = \{(\lambda, \mu) \in M_{k,n-k}(\mathbb{R}) \times M_{k,n-k}(\mathbb{R}) : \phi_i(\lambda) = \phi_j(\mu)\}$$

es un cerrado de $M_{k,n-k}(\mathbb{R}) \times M_{k,n-k}(\mathbb{R})$.

II. FUNCIONES DIFERENCIABLES

{sect:funciones}

§1. Funciones reales

2.1.1. Si M es un espacio topológico y $\mathscr{A}$ es un atlas sobre M, una función $f : M \to \mathbb{R}$ es ***diferenciable*** con respecto a $\mathscr{A}$ si para cada carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de $\mathscr{A}$ es diferenciable la composición {p:dif-1}

$$\phi^{-1}(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Si $(M, \mathscr{A})$ es una variedad, decimos que una función $f : M \to \mathbb{R}$ es ***diferenciable*** si f es diferenciable con respecto al atlas $\mathscr{A}$, y escribimos $C^\infty(M)$ al conjunto de todas las funciones reales sobre M que son diferenciables. Dejamos al lector la sencilla verificación de que $C^\infty(M)$ es una subálgebra del $\mathbb{R}$-álgebra $C(M)$ de las funciones continuas sobre M a valores reales.

2.1.2. Proposición. *Si M es un espacio topológico y $\mathscr{A}_1$ y $\mathscr{A}_2$ son atlas sobre M de dimensión n tales que $\mathscr{A}_1 \subseteq \mathscr{A}_2$, una función $f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable con respecto a $\mathscr{A}_1$ si y solamente si lo es con respecto a $\mathscr{A}_2$.*

Un corolario inmediato de esta proposición es que para que una función $f : M \to \mathbb{R}$ definida sobre una variedad $(M, \mathscr{A})$ sea diferenciable alcanza con que para cada $x \in M$ exista una carta $\phi_x : U_x \to \mathbb{R}^n$ en $\mathscr{A}$ tal que $f \circ \phi_x^{-1} : \phi_x(U_x) \to \mathbb{R}$ es diferenciable. En efecto, en esa situación el conjunto $\{\phi_x\}_{x \in M}$ es un subatlas de $\mathscr{A}$ y podemos aplicar la proposición.

Demostración. Sea $f : M \to \mathbb{R}$. Basta probar que si f es diferenciable con respecto a $\mathscr{A}_1$ entonces es diferenciable con respecto a $\mathscr{A}_2$, ya que la recíproca es inmediata.

Sea entonces $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de $\mathscr{A}_2$ y supongamos que $\mathscr{A}_1 = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$. Si $i \in I$, son diferenciables las composiciones

$$\phi_i(U_i) \xrightarrow{\phi_i^{-1}} U_i \xrightarrow{f} \mathbb{R} \qquad\qquad \phi(U \cap U_i) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \cap U_i \xrightarrow{\phi_i} \phi_i(U \cap U_i),$$

así que también lo es su composición $\phi(U \cap U_i) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \cap U_i \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, que es la restricción a $\phi(U \cap U_i)$ de $\phi(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Como $\{\phi_i(U \cap U_i)\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de $\phi(U)$, esto implica que esta última composición es diferenciable y, entonces, que f es diferenciable con respecto a $\mathscr{A}_2$. $\square$

2.1.3. Un corolario inmediato de esta proposición es que, si U es un abierto de $\mathbb{R}^n$, no hay ambigüedad en el significado de la frase «la función $f : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable».

Lema. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función. Entonces f es diferenciable sii es diferenciable en el sentido de la definición 2.1.1.*

Demostración. Si $i : U \to \mathbb{R}^n$ es la inclusión, entonces $\mathscr{A} = \{i\}$ es un subatlas del atlas $\tilde{\mathscr{A}}$ que da la estructura de variedad a U, así que proposición anterior nos dice que la función f es diferenciable en el sentido de la definición 2.1.1 sii es diferenciable con respecto al atlas $\mathscr{A}$, y esto último es claramente lo mismo que decir que f es una función diferenciable en el sentido usual del cálculo. $\square$

{lema:bump}

2.1.4. Lema. *Si $n \geq 1$ y $\varepsilon > 0$, existe una función no-negativa $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^∞, con soporte contenido en la bola B de radio ε centrada en 0 y que toma el valor 1 sobre todo un entorno de 0 contenido en B.*

Demostración. Sea $f : t \in (0, \infty) \mapsto \exp(-\frac{1}{t}) \in \mathbb{R}$. Una inducción prueba que existe una sucesión $(p_n)_{n \geq 0}$ de polinomios reales tales que para todo $n \geq 0$ es

$$f^{(n)}(t) = t^{-2n} p_n(t) \exp(-\tfrac{1}{t}),$$

y

$$\lim_{t \downarrow 0} f^{(n)}(t)/t = 0.$$

Usando esto, es fácil ver que es de clase C^∞ la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } t > 0; \\ 0, & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Claramente g es no-negativa y tiene a $[0, \infty)$ como soporte. La función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(t) = g(t)g(1-t)$ es entonces C^∞ y tiene soporte $[0, 1]$, y la función $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$k(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} h(t) \mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \mathrm{d}t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

es C^∞, tiene soporte $[0, \infty]$ y $k(t) = 1$ para todo $t \geq 1$. Finalmente, la función $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $l(t) = k(t-2)k(2-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es C^∞, positiva, tiene soporte $[-2, 2]$ y $l(t) = 1$ para todo $t \in [-1, 1]$.

Sea ahora $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\psi(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} l(x_i)$. Se trata de una función de clase C^∞, con soporte $[-2, 2]^n$ y tal que $\psi(x) = 1$ si $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $|t_i| \leq 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Finalmente, si definimos $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ poniendo $\phi(x) = \psi(x/2\sqrt{n})$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, es claro que se cumplen las condiciones del enunciado. □

2.1.5. Proposición. *Sea M una variedad, sea $x \in M$ y sea U un entorno abierto de x en M.*

(i) *Existe una función diferenciable $\phi : M \to \mathbb{R}$ y un entorno abierto V de x tal que $\bar{V} \subseteq U$, $\phi|_V \equiv 1$ y $\phi|_{M \setminus U} \equiv 0$.*

(ii) *Si $f : U \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, existe un entorno abierto V de x en M y una función diferenciable $g : M \to \mathbb{R}$ tales que $\bar{V} \subseteq U$ y $g|_V = f|_V$.*

Demostración. **HACER** □

{lema:taylor}

2.1.6. Lema. *Sean M una variedad de dimensión n, $x \in M$ uno de sus puntos y $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta definida en un entorno de x. Existen entonces funciones $\psi_1, \dots, \psi_n \in C^\infty(M)$ que se anulan en x tales que para cada $f \in C^\infty(M)$ existen funciones diferenciables $h_{i,j} \in C^\infty(M)$ para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tales que*

$$f = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\bigg|_{\phi(x)} \psi_i + \sum_{i,j=1}^{n} h_{i,j} \psi_i \psi_j.$$

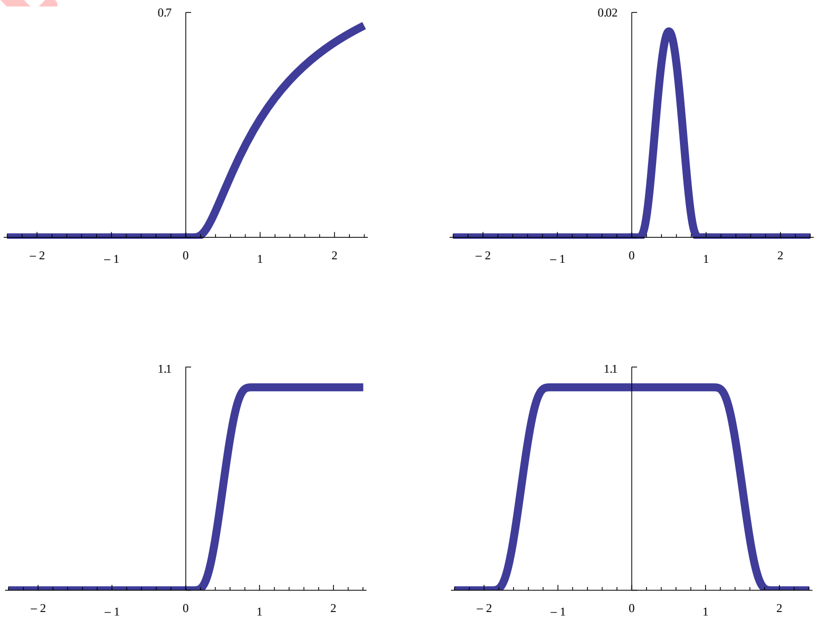

Figura 1. Las funciones g, h, k, l construidas en la prueba del Lema 2.1.4.

Demostración. **Hacer** □

§2. Funciones entre variedades

2.2.1. Si $(M, \mathscr{A})$ y $(N, \mathscr{A}')$ son variedades de dimensión m y n, respectivamente, una función $f : M \to N$ es ***diferenciable*** si para cada $x \in M$ existen una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ en $\mathscr{A}$ y una carta $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ en $\mathscr{A}'$ tales que $x \in U$, $f(U) \subseteq V$ y es diferenciable la composición {p:dif-2}

$$\phi(U) \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$$

2.2.2. Lema. *Sean $(M, \mathscr{A})$ y $(N, \mathscr{A}')$ variedades de dimensión m y n, respectivamente, y sea $f : M \to N$ una función diferenciable. Entonces para cada $x \in M$ y cada carta $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ de N alrededor de $f(x)$, existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ alrededor de x tal que $f(U) \subseteq V$ y la composición $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable. En particular, f es continua.*

Demostración. **Hacer** □

2.2.3. Si $(M, \mathscr{A})$ es una variedad y $f : M \to \mathbb{R}$ es una función real, tenemos dos sentidos distintos para la afirmación «f es una función diferenciable». De manera similar, tenemos dos definiciones para lo que significa que una función entre abiertos de espacios euclídeos sea diferenciable. El contenido del siguiente lema es que no hay en realidad ninguna ambigüedad.

Lema. (i) *Sea $(M, \mathscr{A})$ una variedad y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función. Entonces f es diferenciable de acuerdo a la Definición 2.1.1 sii es diferenciable de acuerdo a la Definición 2.2.1, si vemos a $\mathbb{R}$ como variedad con su atlas canónico.*

(ii) *Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ son abiertos, entonces una función $f : U \to V$ es diferenciable sii es diferenciable de acuerdo a la Definición 2.2.1, cuando vemos a U y a V como variedades con sus atlas canónicos.*

Demostración. **Hacer** □

2.2.4. Proposición. *Sea M, N y P variedades. Si $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son funciones diferenciables, entonces $g \circ f : M \to P$ es una función diferenciables.*

Demostración. **Hacer** □

2.2.5. Proposición. *Sean M y N variedades diferenciables y sea el producto cartesiano $M \times N$ dotado de su estructura de variedad construida en la Proposición 1.2.3.*

(i) *Las proyecciones $p_1 : M \times N \to M$ y $p_2 : M \times N \to N$ son funciones diferenciables.*

(ii) *Si P es una variedad y $f : P \to M$ y $g : P \to N$ son funciones diferenciables, entonces existe exactamente una función diferenciable $h : P \to M \times N$ tal que $p_1 \circ h = f$ y $p_2 \circ h = g$.*

Demostración. **Hacer** □

2.2.6. Podemos dar una generalización de Proposición 1.2.4 que es muy cómoda al construir ejemplos:

{prop:construccion:bis}

Proposición. *Sea X un conjunto, sea $n \geq 1$, sea $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de X y consideremos una familia $\mathscr{A} = \{\phi_i : U_i \to N_i\}_{i \in I}$ de funciones con codominios variedades de dimensión n. Supongamos que:*

- *para cada $i \in I$ la función ϕ_i es biyectiva;*
- *para cada $i, j \in I$ el conjunto $\phi_i(U_i \cap U_j)$ es un abierto de N_i y la composición*

$$\phi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\phi_i^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\phi_j} \phi_j(U_i \cap U_j)$$

  es un diferenciable;
- *para cada $i, j \in I$ el conjunto*

$$\Delta_{i,j} = \{(a, b) \in N_i \times N_j : \phi_i^{-1}(a) = \phi_j^{-1}(b)\}$$

  es un cerrado de $N_i \times N_j$;
- *$\mathscr{U}$ contiene un subcubrimiento numerable.*

Entonces existe exactamente una topología sobre el conjunto X que hace de él un espacio Hausdorff y con base numerable, y una única estructura de variedad sobre M que hace de cada uno de los elementos de $\mathscr{A}$ un difeomorfismo.

III. Espacios tangentes

{sect:tpm}

§1. Vectores y espacios tangentes

3.1.1. Si M es una variedad y $x \in M$, escribimos $T_x M$ al conjunto de todas las funciones $\mathbb{R}$-lineales $\delta : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ tales que

$$\delta(fg) = \delta(f)g(x) + f(x)\delta(g), \qquad \forall f, g \in C^\infty(M). \tag{9}$$

{eq:deriv}

Es fácil verificar que $T_x M$ es un subespacio vectorial de $\hom(C^\infty(M), \mathbb{R})$. Llamamos a $T_x M$ el ***espacio tangente a M en x*** y a sus elementos los ***vectores tangentes a M en x***. Escribiremos $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M$.

{lema:ders}

3.1.2. Lema. *Sean M una variedad, $x \in M$ y $\delta \in T_x M$.*

(i) *Si $f \in C^\infty(M)$ es constante, $\delta(f) = 0$.* {lema:ders:cte}

(ii) *Si $f, g \in C^\infty(M)$ se anulan en x, entonces $\delta(fg) = 0$.* {lema:ders:prod}

(iii) *Si $h \in C^\infty(M)$ se anula en un entorno de x, entonces $\delta(h) = 0$.*

(iv) *Si $f, g \in C^\infty(M)$ coinciden en un entorno de x, entonces $\delta(f) = \delta(g)$.*

Demostración. *(i)* Como δ es $\mathbb{R}$-lineal, es suficiente mostrar que $\delta(f) = 0$ si f es idénticamente igual a 1. Pero en ese caso es $f^2 = f$, así que

$$\delta(f) = \delta(f^2) = \delta(f)f(x) + f(x)\delta(f) = 2\delta(f),$$

y esto es posible sólo si $\delta(f) = 0$.

(ii) Esto es inmediato de (9).

(iii) Sea U es un entorno abierto de x tal que $h|_U \equiv 0$ y sea V un entorno abierto de x tal que $\bar{V} \subset U$. Si $\phi \in C^\infty(M)$ es tal que $\phi|_V \equiv 0$ y $\phi|_{M \setminus U} \equiv 1$, entonces $h = h\phi$ y

$$\delta(h) = \delta(h)\phi(x) + h(x)\delta(\phi) = 0$$

porque $\phi(x) = h(x) = 0$.

(iv) Basta aplicar la parte anterior a $h = f - g$. □

3.1.3. Hacer: Como consecuencia de esto, podemos hacer actual a los elementos de $T_x M$ sobre funciones diferenciables $f : U \to \mathbb{R}$ definidas en abiertos de M que contienen a x. Esto hace que podamos identificar $T_x U$ con $T_x M$.

3.1.4. Si M es una variedad, $x \in M$ y $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es una carta de M definida en un entorno abierto de x e $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $\partial_i|_x : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ la función tal que

$$\partial_i^\phi|_x(f) = \left.\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\right|_{\phi(x)}.$$

Observemos que esto tiene sentido: a la derecha de esta igualdad tenemos la derivada parcial i-ésima de la función $f \circ \phi^{-1} : \phi_i(U) \to \mathbb{R}$, que es diferenciable, evaluada en $\phi(x)$. Cuando esto no lleve a confusión, escribiremos simplemente ∂_i^ϕ, $\partial_i|_x$ o inclusive ∂_i, en lugar de $\partial_i^\phi|_x$.

{prop:dual}

3.1.5. Proposición. *Sea M una variedad de dimensión n, sea $x \in M$ y sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M definida en un entorno de x.*

(i) *El conjunto $\{\partial_i^\phi|_x : 1 \leq i \leq n\}$ es una base de T_xM. En particular, es $\dim T_xM = n$.* {prop:iota}

(ii) *La función*

$$\iota_x^\phi : (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto \sum_{i=1}^n \xi_i \partial_i^\phi|_x \in T_xM$$

es un isomofismo de espacios vectoriales. {prop:dual:3}

(iii) *Si $\phi_1, \dots, \phi_n : U \to \mathbb{R}$ son las componentes de ϕ, entonces para cada $X \in T_xM$ es*

$$X = \sum_{i=1}^n X\phi_i \, \partial_i^\phi|_x.$$

Demostración. (i) Sea $X \in T_xM$. Sean $\psi_1, \dots, \psi_n \in C^\infty(M)$ como en el Lema 2.1.6 y sea $f \in C^\infty(M)$. Existen funciones $h_{i,j} \in C^\infty(M)$ para $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tales que

$$f = f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)} \psi_i + \sum_{i,j=1}^n h_{i,j}\psi_i\psi_j.$$

Como $\psi_1(x) = \cdots = \psi_n(x) = 0$, aplicando X a ambos miembros de esta igualdad y usando las dos primeras partes del Lema 3.1.2 vemos que

$$Xf = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)} X\psi_i. \tag{10}$$ {eq:actx}

Esto nos dice que X y $\sum_{i=1}^n X\psi_i \, \partial_i^\phi|_x$, dos elementos de T_xM, toman el mismo valor sobre cada $f \in C^\infty(M)$: son entonces iguales. Podemos concluir, en consecuencia, que el conjunto $\mathscr{B} = \{\partial_i^\phi|_x : 1 \leq i \leq n\}$ genera a T_xM y, de hecho, que vale la segunda afirmación del enunciado.

Por otro lado, si $\phi_1, \dots, \phi_n : U \to \mathbb{R}$ son las componentes de ϕ, de manera que para cada $y \in U$ es $\phi(y) = (\phi_1(y), \dots, \phi_n(y))$, es inmediato que $\partial_i^\phi|_x(\phi_j) = \delta_{i,j}$ para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y es fácil deducir de esto que el conjunto $\mathscr{B}$ es linealmente independiente.

(ii) Esto es consecuencia inmediata de la parte anterior de la proposición.

(iii) Finalmente, esto es precisamente lo que nos dice la igualdad (10) que obtuvimos arriba. □

3.1.6. Cada carta de M alrededor de x nos da, de esta forma, una base del espacio tangente T_xM. La siguiente proposición nos dice cómo son las matrices de cambio de base entre las bases correspondientes a cartas distintas.

{prop:cambio}

Proposición. *Sea M una variedad de dimensión n y sean $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ cartas de M definidas en entornos de un punto $x \in M$. Entonces conmuta el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "D_{\phi(x)}(\psi\circ\phi^{-1})"] \arrow[dr, "\iota_x^\phi"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\iota_x^\psi"] \\
& T_xM &
\end{tikzcd}$$

Si $\psi_1, \dots, \psi_n : V \to \mathbb{R}^n$ son las componentes de ψ, entonces

$$\partial_i^{\phi}|_x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\psi_j \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)} \partial_j^{\psi}|_x$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración. **Hacer** □

§2. La diferencial de una función diferenciable

3.2.1. Sean M y N variedades y sea $f : M \to N$ una función diferenciable. Si $x \in M$ y $X \in T_x M$, definimos la función $f_{*x}(X) : h \in C^\infty(N) \longmapsto X(h \circ f) \in \mathbb{R}$; notemos que esto tiene sentido, porque $h \circ f \in C^\infty(M)$ cualquiera sea $h \in C^\infty(N)$.

Si g, $h \in C^\infty(N)$, entonces

$$\begin{aligned} f_{*x}(X)(gh) &= X((gh) \circ f) \\ &= X\big((g \circ f)\,(h \circ f)\big) \\ &= X(g \circ f)\,(h \circ f)(x)) + (g \circ f)(x)\,X(h \circ f) \\ &= f_{*x}(X)(g)\,h(f(x)) + g(f(x))\,f_{*x}(X)(h), \end{aligned}$$

así que $f_{*x}(X) \in T_{f(x)}N$. Tenemos entonces una función

$$f_{*x} : X \in T_x M \longmapsto f_{*x}(X) \in T_{f(x)}N$$

a la que llamamos la ***diferencial de f en x***. Se trata de una función lineal. En efecto, si $X, Y \in T_x M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces para cada $h \in C^\infty(N)$ es

$$\begin{aligned} f_{*x}(\lambda X)(h) &= (\lambda X)(h \circ f) \\ &= \lambda X(h \circ f) \\ &= \lambda f_{*x}(X)(h), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_{*x}(X + Y)(h) &= (X + Y)(h \circ f) \\ &= X(h \circ f) + Y(h \circ f) \\ &= f_{*x}(Y)(h) + f_{*x}(Y)(h) \\ &= (f_{*x}(X) + f_{*x}(Y))(h), \end{aligned}$$

de manera que $f_{*x}(\lambda X) = \lambda f_{*x}(X)$ y $f_{*x}(X + Y) = f_{*x}(X) + f_{*x}(Y)$.

3.2.2. Lema. (i) *Sean M y N variedades de dimensión m y n y sea $f : M \to N$ una función diferenciable. Sea $x \in M$ y sean $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ cartas de M y N alrededor de x*

y de $f(x)$, respectivamente, y sean $\psi_1, \dots, \psi_n : V \to \mathbb{R}$ las componentes de ψ, de manera que $\psi(y) = (\psi_1(y), \dots, \psi_n(y))$ para cada $y \in V$. Entonces para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ se tiene que

$$f_{*x}\left(\partial_i^\phi|_x\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi_j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_j}\Big|_{\phi(x)} \partial_j^\psi|_{f(x)}.$$

(ii) *Sean M, N y P variedades y sean $f : M \to N$ y $g : N \to P$ funciones diferenciables. Entonces para cada $x \in M$ es*

$$(g \circ f)_{*x} = g_{*f(x)} \circ f_{*x}.$$

Demostración. *(i)* Si $j \in \{1, \dots, n\}$, las definiciones implican que

$$f_{*x}\left(\partial_i^\phi|_x\right)(\psi_j) = \partial_i^\phi|_x(\psi_j \circ f) = \frac{\partial(\psi_j \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\phi(x)},$$

así que vale la igualdad del enunciado.

(ii) Esto es consecuencia de que para cada $X \in T_xM$ y $h \in C^\infty(P)$ es

$$\begin{aligned}
\big(g_{*f(x)} \circ f_{*x}\big)(X)(h) &= g_{*f(x)}\big(f_{*x}(X)\big)(h) \\
&= f_{*x}(X)(h \circ g) \\
&= X\big((h \circ g) \circ f\big) \\
&= X\big(h \circ (g \circ f)\big) \\
&= (g \circ f)_{*x}(X)(h)
\end{aligned}$$

□

{prop:t-producto}

3.2.3. Proposición. *Sean M y N variedades y sean $p_1 : M \times N \to M$ y $p_2 : M \times N \to N$ las proyecciones canónicas. Sea $(a, b) \in M \times N$ y sean $q_1 : y \in N \mapsto (a, y) \in M \times N$ y $q_2 : x \in M \mapsto (x, b) \in M \times N$. Tenemos entonces funciones lineales*

$$\begin{tikzcd}
T_aM \arrow[dr, bend left, "q_{1*a}"] & & T_aM \\
& T_{(a,b)}(M \times N) \arrow[ur, bend left, "p_{1*(a,b)}"] \arrow[dr, bend right, "p_{2*(a,b)}"'] & \\
T_bN \arrow[ur, bend right, "q_{2*b}"'] & & T_bN
\end{tikzcd}$$

y valen las relaciones

$$p_{1*(a,b)} \circ q_{1*a} = \mathrm{id}_{T_aM}, \qquad p_{1*(a,b)} \circ q_{2*b} = 0,$$

$$p_{2*(a,b)} \circ q_{2*b} = \mathrm{id}_{T_bN}, \qquad p_{2*(a,b)} \circ q_{1*a} = 0,$$

$$q_{1*a} \circ p_{1*(a,b)} + q_{2*b} \circ p_{2*(a,b)} = \mathrm{id}_{T_{(a,b)}}(M \times N).$$

En particular, las funciones

$$\begin{pmatrix} p_{1*(a,b)} \\ p_{2*(a,b)} \end{pmatrix} : T_{(a,b)}(M \times N) \to T_aM \oplus T_bN$$

y

$$\begin{pmatrix} q_{1*a} & q_{2*b} \end{pmatrix} : T_aM \oplus T_bN \to T_{(a,b)}(M \times N)$$

son isomorfismos inversos.

En general, consideraremos a estos dos isomorfismos como identificaciones. Por supuesto, consideraciones similares valen para productos cartesianos con un número arbitrario (finito) de factores.

Demostración. **Hacer** □

§3. Campos tangentes

3.3.1. Sea M una variedad diferenciable y $U \subseteq M$ un abierto. Un ***campo tangente a M sobre U*** es una función $X : U \to TM$ tal que para cada $x \in U$ es $X(x) \in T_xM$; generalmente escribimos X_x en lugar de $X(x)$. Si $f \in C^\infty(U)$, definimos $Xf : U \to \mathbb{R}$ poniendo $(Xf)(x) = X_xf$ para todo $x \in U$. {p:campo}

{prop:campo}

3.3.2. Proposición. *Sean M una variedad de dimensión n $X : U \to TM$ un campo tangente a M sobre un abierto $U \subseteq M$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *Para cada $f \in C^\infty(U)$, la función $Xf : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable.*

(b) *Para cada carta $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ definida en un abierto $V \subseteq U$, existen funciones $\xi_1, \dots, \xi_n \in C^\infty(V)$ tales que para todo $x \in V$ es*

$$X_x = \sum_{i=1}^n \xi_i(x)\, \partial_i^\phi|_x.$$

(c) *Para cada $x \in U$, existe una carta $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ definida en un abierto V tal que $x \in V \subset U$ y funciones $\xi_1, \dots, \xi_n \in C^\infty(V)$ tales que para todo $y \in V$ es*

$$X_y = \sum_{i=1}^n \xi_i(y)\ \partial_i^\phi|_y.$$

Hacer: Esta proposición tiene una versión para campos continuos...

Demostración. (*a*) $\Rightarrow$ (*b*) Sea $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ una carta definida en un abierto $V \subseteq U$ y sean $\phi_1, \dots, \phi_n : V \to \mathbb{R}$ las componentes de ϕ. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ la función ϕ_i es diferenciable, así que tenemos definida la función $\xi_i = X\phi_i : V \to \mathbb{R}$ que, por hipótesis, es diferenciable. De la Proposición 3.1.5*(iii)* sabemos que para cada $x \in V$ es $X_x = \sum_{i=1}^n \xi_i \partial_i^\phi|_x$. Esto prueba (*b*).

(*b*) $\Rightarrow$ (*c*) Esta implicación es inmediata.

(*c*) $\Rightarrow$ (*a*) Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $x \in U$, existe por hipótesis una carta $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ definida en un abierto V tal que $x \in V \subseteq U$ y funciones diferenciables $\xi_1, \dots, \xi_n : V \to \mathbb{R}$ tales que $X_y = \sum_{i=1}^n \xi_i(y)\partial_i^\phi|_y$ para todo $y \in V$. Entonces para cada $y \in V$ es $(Xf)(y) = \sum_{i=1}^n \xi_i(y)\partial_i^\phi|_y(f)$ y, como la función $y \in V \longmapsto \partial_i^\phi|_y(f)$ es diferenciable, esta igualdad implica que Xf es diferenciable en V y, en definitiva, sobre todo U. □

3.3.3. Si M es una variedad, $U \subseteq M$ un abierto y $X : U \to TM$ un campo tangente, decimos que X es ***diferenciable*** si satisface las condiciones de esta proposición. Escribimos $\mathfrak{X}(U)$ al conjunto de todos los campos tangentes a M definidos sobre U y diferenciables.

3.3.4. Proposición. *Sea M una variedad y $U \subseteq M$ un abierto. Si $f \in C^\infty(U)$ y $X \in \mathfrak{X}(U)$, entonces la función*

$$fX : x \in V \longmapsto f(x)X_x \in TM$$

también es un elemento de $\mathfrak{X}(U)$. Esto define una función

$$(f, X) \in C^\infty(U) \times \mathfrak{X}(U) \mapsto fX \in \mathfrak{X}(U)$$

que hace de $\mathfrak{X}(U)$ un $C^\infty(U)$-módulo izquierdo.

Demostración. **Hacer** □

3.3.5. Si A es una $\mathbb{R}$-álgebra, una ***derivación*** $\delta : A \to A$ es una función $\mathbb{R}$-lineal tal que para cada $a, b \in A$ es

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$$

y $\mathrm{Der}(A)$ es el conjunto de todas las derivaciones $A \to A$. Es inmediato verificar que $\mathrm{Der}(A)$ es un subespacio vectorial de $\hom(A, A)$.

Proposición. *Sea M una variedad y $U \subseteq M$ un abierto.*
(i) *Si $X \in \mathfrak{X}(U)$, la función $\delta_X : f \in C^\infty(U) \mapsto Xf \in C^\infty(U)$ es una derivación de $C^\infty(U)$.*
(ii) *La función $X \in \mathfrak{X}(U) \mapsto \delta_X \in \mathrm{Der}(C^\infty(U))$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. **Hacer** □

{prop:campos-producto

3.3.6. Proposición. **Hacer**: *Análogo a 3.2.3 para campos.*

§4. Variedades paralelizables

3.4.1. Decimos que una variedad M es ***paralelizable*** si $\mathfrak{X}(M)$ es un $C^\infty(M)$-módulo libre.

Lema. *Sea M una variedad de dimensión n. Si M es paralelizable, entonces $\mathfrak{X}(M)$ es un $C^\infty(M)$-módulo libre de rango n.*

§5. El fibrado tangente

3.5.1. Fijemos una variedad M y sea $\mathscr{A} = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$ su atlas. Escribimos, como siempre, $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M$ y denotamos $p : TM \to M$ a la función tal que para cada $x \in M$ y cada $v \in T_x M$ es $p(v) = x$.

3.5.2. Si $i \in I$, sea $\tilde{U}_i = p^{-1}(U) = \bigsqcup_{x \in U} T_x M$ y consideremos la función $\tilde{\phi}_i : \tilde{U}_i \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que para cada $x \in U$ y cada $\xi = \sum_{k=1}^n \xi_i \partial_k^{\phi_i}|_x$ es

$$\tilde{\phi}_i(\xi) = (\phi_i(x), (\xi_1, \dots, \xi_n));$$

esto está bien definido porque para cada $x \in U$ el conjunto $\{\partial_k^{\phi_i}|_x : 1 \leq k \leq n\}$ es una base de $T_x M$. Mostremos que el conjunto $\tilde{\mathscr{A}} = \{\tilde{\phi}_i : \tilde{U}_i \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$ satisface las condiciones de la Proposición 1.2.4:

- Que el conjunto $\{\partial_k^{\phi_i}|_x : 1 \leq k \leq n\}$ sea una base de $T_x M$ junto con el hecho de que $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva, implica que $\tilde{\phi}_i : \tilde{U}_i \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es inyectiva y que tiene por imagen al conjunto $\phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$, que claramente es un abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. La función inversa $\tilde{\phi}_i^{-1} : \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n \to \tilde{U}_i$ es tal que para cada $x \in \phi_i(U_i)$ y cada $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ es

$$\tilde{\phi}_i^{-1}(x, \xi) = \iota^{\phi_i}_{\phi_i^{-1}(x)}(\xi) = \Big(\phi_i^{-1}(x), \sum_{k=1}^n \xi_k \partial_k^{\phi}|_{\phi_i^{-1}(x)}\Big). \tag{11}$$ {eq:phiinv}

- Si $i, j \in I$, entonces es $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j = \bigsqcup_{x \in U_i \cap U_j} T_x M$, así que

$$\tilde{\phi}_i(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j) = \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n,$$

que es un abierto de $\phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$. Usando la expresión (11) para ϕ_i^{-1} y el resultado de la Proposición 3.1.6, podemos calcular que la composición

$$\phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\tilde{\phi}_i^{-1}} \tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \xrightarrow{\tilde{\phi}_j} \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$$

es la función

$$(x, \xi) \longmapsto \big((\phi_j \circ \phi_i^{-1})(x), D_x(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(\xi)\big),$$

que es claramente diferenciable.

- Sean $i, j \in I$, $(x, \xi) \in \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$ e $(y, \zeta) \in \phi_j(U_j) \times \mathbb{R}^n$. Mostremos que

$$\tilde{\phi}_i^{-1}(x, \xi) = \tilde{\phi}_j^{-1}(y, \zeta) \iff y = (\phi_j \circ \phi_i^{-1})(x) \text{ y } \xi_k = D_x(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(\zeta). \tag{12}$$ {eq:tilde}

Si $\tilde{\phi}_i^{-1}(x, \xi) = \tilde{\phi}_j^{-1}(y, \zeta)$, entonces

$$\phi_i^{-1}(x) = p\big(\tilde{\phi}_i^{-1}(x, \xi)\big) = p\big(\tilde{\phi}_j^{-1}(y, \zeta)\big) = \phi_j^{-1}(y),$$

así que $y = (\phi_j \circ \phi_i^{-1})(x)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \xi_k \partial_k^{\phi_i}|_{\phi_i^{-1}(x)} = \tilde{\phi}_i^{-1}(x, \xi) = \tilde{\phi}_j^{-1}(y, \zeta) = \sum_{l=1}^n \zeta_l \partial_l^{\phi_j}|_{\phi_j^{-1}(y)} = \sum_{l=1}^n \zeta_l \partial_l^{\phi_j}|_{\phi_i^{-1}(x)}, \\ = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \zeta_l \frac{\partial(\phi_{i,k} \circ \phi_j^{-1})}{\partial x_l}\bigg|_x \right) \partial_k^{\phi_j}|_{\phi_i^{-1}(x)} \end{aligned}$$

así que

$$\xi_k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial(\phi_{i,k} \circ \phi_j^{-1})}{\partial x_l}\Big|_x \zeta_l \qquad \text{para cada } k \in \{1, \dots, n\},$$

es decir, $\xi_k = D_x(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(\zeta)$. Esto prueba una implicación de (12), y el argumento es claramente reversible.

Vemos así que el conjunto

$$\Delta_{i,j} = \{((x,\xi),(y,\zeta)) \in (\phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n) \times (\phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n) : \tilde{\phi}_i^{-1}(x,\xi) = \tilde{\phi}_j^{-1}(y,\zeta)\}$$

es un cerrado de $(\phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n) \times (\phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n)$, porque la condición que aparece a la derecha en la equivalencia (12) es una condición cerrada.

- Sabemos que $\mathscr{A}$ contiene un subatlas $\mathscr{A}' = \{\phi_i\}_{i \in J}$ con $J \subseteq I$ numerable. Es inmediato que el conjunto $\{\tilde{U}_i\}_{i \in J}$ es un subcubrimiento numerable de $\{\tilde{U}_i\}_{i \in I}$ de TM.

Concluimos de esta forma que TM posee una única topología Hausdorff y con base numerable para la cual $\tilde{\mathscr{A}}$ es un atlas de dimensión $2n$. Llamamos a la variedad $(TM, \tilde{\mathscr{A}}^{\mathsf{max}})$ el ***fibrado tangente*** a M

3.5.3. Si $U \subseteq M$ es un abierto, una ***sección*** de TM sobre U es una función $s : U \to TM$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_U$. Notemos que esta condición dice, precisamente, que $s(x) \in T_x M$ para todo $x \in U$, así que s es lo que llamamos un campo tangente a M sobre U en 3.3.1.

Proposición. *Sea M una variedad y sea $U \subseteq M$ un abierto. Una sección $s : U \to TM$ de TM sobre U es continua o diferenciable en tanto función entre variedades sii es continua o diferenciable en tanto campo tangente a M sobre U.*

Demostración. **Hacer** □

3.5.4. Si $f : M \to N$ es una función diferenciable entre variedades, escribimos $Tf : TM \to TN$ a la función tal que para cada $x \in M$ y cada $v \in T_x M$ es $Tf(v) = f_{*x}(v)$.

Proposición. *Si M y N son variedades y $f : M \to N$ es una función diferenciable, entonces la función $Tf : TM \to TN$ es una función diferenciable.*

Demostración. **Hacer** □

3.5.5. **Hacer:** $T(M \times N) = TM \times N$.

§6. Fibrados asociados al fibrado tangente

3.6.1. En esta sección nos proponemos generalizar la construcción hecha en la anterior del fibrado tangente de una variedad a una situación más general, reemplazando a los espacios tangentes por variedades construidas “de manera functorial” a partir de ellos.

3.6.2. Un ***functor***, para nosotros, será una regla $\mathscr{F}$ que

- a cada espacio vectorial real V de dimensión finita asigne una variedad $\mathscr{F}(V)$, y

- a cada isomorfismo $\alpha : V \to W$ entre espacios vectoriales de dimensión finita asigne una función diferenciable $\mathscr{F}(\alpha) : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(W)$

de manera tal que se cumplan las siguientes dos condiciones:

- si V es un espacio vectorial de dimensión finita e $\mathsf{id}_V : V \to V$ es la aplicación identidad de V, entonces $\mathscr{F}(\mathsf{id}_V) : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(V)$ es la aplicación identidad $\mathsf{id}_{\mathscr{F}(V)}$ de $\mathscr{F}(V)$, y
- si $\alpha : V \to W$ y $\beta : W \to U$ son isomorfismos entre espacios vectoriales de dimensión finita, entonces $\mathscr{F}(\beta \circ \alpha) = \mathscr{F}(\beta) \circ \mathscr{F}(\alpha) : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$.

Diremos que $\mathscr{F}$ es ***diferenciable*** si para cada espacio vectorial de dimensión finita V es diferenciable la función

$$\lambda_V : (\alpha, x) \in \mathsf{GL}(V) \times \mathscr{F}(V) \longmapsto \mathscr{F}(\alpha)(x) \in \mathscr{F}(V). \tag{13}$$

{eq:lambda:V}

Notemos que esto tiene sentido, porque para cada tal V el conjunto $\mathsf{GL}(V)$ de los automorfismos de V es, de manera canónica, una variedad.

3.6.3. Una consecuencia inmediata de la definición anterior es que si $\mathscr{F}$ es un functor, entonces para cada isomorfismo $\alpha : V \to W$ entre espacios vectoriales de dimensión finita, la función $\mathscr{F}(\alpha) : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(W)$ es un difeomorfismo. En efecto, si $\alpha : V \to W$ es un tal isomorfismo y $\beta : W \to V$ es su inverso, entonces

$$\mathscr{F}(\alpha) \circ \mathscr{F}(\beta) = \mathscr{F}(\alpha \circ \beta) = \mathscr{F}(\mathsf{id}_W) = \mathsf{id}_{\mathscr{F}(W)}$$

y, de la misma forma, $\mathscr{F}(\beta) \circ \mathscr{F}(\alpha) = \mathsf{id}_{\mathscr{F}(V)}$, así que $\mathscr{F}(\alpha)$ y $\mathscr{F}(\beta)$ son difeomorfismos inversos.

3.6.4. Fijemos ahora una variedad M de dimensión n y un functor diferenciable $\mathscr{F}$, y supongamos que $\mathscr{A} = \{\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$ es el atlas de M. Consideremos el conjunto $\mathscr{F}(M) = \bigsqcup_{x \in M} \mathscr{F}(T_x M)$ la función $p : \mathscr{F}(M) \to M$ tal que para cada $x \in M$ y cada $f \in \mathscr{F}(T_x M)$ es $p(f) = x$.

Si $i \in I$, pongamos $\tilde{U}_i = p^{-1}(U_i)$. Sabemos que para cada $x \in U_i$ hay un isomorfismo lineal $\alpha_{i,x} : T_x M \to \mathbb{R}^n$ con componentes $\alpha_{i,x,1}, \dots, \alpha_{i,x,n} : T_x M \to \mathbb{R}$ tal que para cada cada $v \in T_x M$ es $v = \sum_{\ell=1}^n \alpha_{i,x,\ell}(v) \partial_\ell^{\phi_i}|_x$. Podemos considerar entonces la función $\tilde{\phi}_i : \tilde{U}_i \to U_i \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{\phi}_i(f) = (p(f), \mathscr{F}(\alpha_{i,p(v)})(f))$ para cada $f \in \tilde{U}_i$. Mostremos que $\tilde{\mathscr{A}} = \{\tilde{\phi}_i : \tilde{U}_i \to U_i \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)\}_{i \in I}$ satisface las condiciones de la Proposición 2.2.6.

- Sea $i \in I$. La función $\tilde{\phi}_i$ es inyectiva: si f, $f' \in \tilde{U}_i$ son tales que $\tilde{\phi}_i(f) = \tilde{\phi}_i(f')$, entonces $p(f) = p(f')$ y $\mathscr{F}(\alpha_{i,p(f)})(f) = \mathscr{F}(\alpha_{i,p(f)})(f')$ así que, como $\mathscr{F}(\alpha_{i,p(f)})$ es un inyectiva, $f = f'$. Por otro lado, si $(x, y) \in U_i \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$, existe $f \in \mathscr{F}(T_x M) \subseteq \tilde{U}_i$ tal que $\mathscr{F}(\alpha_{i,x})(f) = z$ porque $\mathscr{F}(\alpha_{i,x})$ es sobreyectiva, y entonces $\tilde{\phi}_i(f) = (x, y)$, así que $\tilde{\phi}_i$ es, de hecho, una biyección.
- Sean $i, j \in I$. Es $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j = p^{-1}(U_i \cap U_j)$, así que $\tilde{\phi}_i(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j) = (U_i \cap U_j) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$, y esto es claramente un abierto de $U_i \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$. La composición

  $$(U_i \cap U_j) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\tilde{\phi}_i^{-1}} \tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \xrightarrow{\tilde{\phi}_j} (U_i \cap U_j) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$$

  está dada por

  $$(x, f) \longmapsto \big(x, (\mathscr{F}(\alpha_{j,x}) \circ \mathscr{F}(\alpha_{i,x})^{-1})(f)\big)$$

Para ver que es diferenciable, basta mostrar que

$$(x, f) \in (U_i \cap U_j) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n) \longmapsto \mathscr{F}(\alpha_{j,x} \circ \alpha_{i,x}^{-1})(f) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$$

lo es, y esta función es la composición

$$(U_i \cap U_j) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{t \times \mathsf{id}_{\mathscr{F}(\mathbb{R}^n)}} \mathsf{GL}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\lambda_{\mathbb{R}^n}} \mathscr{F}(\mathbb{R}^n)$$

con $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ la función diferenciable definida como en (13) y

$$t : x \in U_i \cap U_j \longmapsto \alpha_{j,x} \circ \alpha_{i,x}^{-1} \in \mathsf{GL}(\mathbb{R}^n).$$

Hacer

IV. Orientabilidad

§1. Espacios vectoriales

Orientaciones

4.1.1. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n *positiva* y sea $\mathscr{B}(V)$ el conjunto de las bases ordenadas de V. Si $B = (v_1, \dots, v_n)$, $B' = (v'_1, \dots, v'_n) \in \mathscr{B}(V)$ son dos bases, sea $C(B, B') = (c_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ la matriz de cambio de base de B a B', de manera que $v'_i = \sum_{j=1}^n c_{i,j} v_j$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$; se trata de una matriz inversible y, de hecho, es fácil verificar que $C(B, B')^{-1} = C(B', B)$.

Decimos que dos bases B, $B' \in \mathscr{B}(V)$ son ***positivamente equivalentes*** si $\det C(B, B) > 0$ y, en ese caso, escribimos $B \sim B'$. Se trata de una relación de equivalencia en $\mathscr{B}(V)$:

- Si $B \in \mathscr{B}(V)$, entonces $C(B, B) = I$, así que $\det C(B, B) = 1 > 0$: vemos que $B \sim B$ y, en consecuencia, que $\sim$ es reflexiva.
- Si B, $B' \in \mathscr{B}(V)$ son tales que $B \sim B'$, entonces $C(B', B) = C(B, B')^{-1}$ y
$$\det C(B', B) = \det C(B, B')^{-1} = \big(\det C(B, B')\big)^{-1} > 0$$
porque $\det C(B, B') > 0$. Esto nos dice que $B' \sim B$ y que $\sim$ es simétrica.
- Si B, B', $B'' \in \mathscr{B}(V)$ son tales que $B \sim B'$ y $B' \sim B''$, de manera que $\det C(B, B') > 0$ y $\det C(B', B'')$, sabemos que $C(B, B'') = C(B', B'')C(B, B')$, y entonces
$$\det C(B, B'') = \det C(B', B'')C(B, B') = \det C(B', B'') \det C(B, B') > 0$$
y, en consecuencia, $B \sim B''$. Esto prueba la transitividad.

Podemos, entonces, considerar el conjunto cociente $\mathscr{O}(V) = \mathscr{B}(V)/\sim$. Los elementos de $\mathscr{O}(V)$ son las ***orientaciones*** de V y, si $B \in \mathscr{B}(V)$, escribimos $[B] \in \mathscr{O}(V)$ a clase de equivalencia de B en $\mathscr{B}(V)$ y decimos que es la ***orientacion de V determinada por B***.

Un ***espacio vectorial orientado*** es un par (V, o) formado por un espacio vectorial real V de dimensión finita y positiva y una orientación $o \in \mathscr{O}(V)$; generalmente omitiremos a o de la notación.

{prop:vect:2o}

4.1.2. Proposición. *Un espacio vectorial real de dimensión finita y positiva tiene exactamente dos orientaciones.*

En vista de este resultado, podemos introducir la siguiente notación: si o es una orientación de un espacio vectorial real de dimensión finita y positiva V, escribimos $o_!$ a la única otra orientación de V, de manera que sea $\mathscr{O}(V) = \{o, o_!\}$, y llamamos a $o_!$ la ***orientación opuesta*** a o.

Demostración. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y positiva. Mostremos que si B, B', $B'' \in \mathscr{B}(V)$ son tres bases ordenadas de V hay dos de ellas que son positivamente equivalentes: la proposición se deduce inmediatamente de esto. Como

$$C(B'', B)C(B', B'')C(B, B') = C(B, B) = I$$

es la matriz identidad, es

$$\det C(B'', B)\, \det C(B', B'')\, \det C(B, B') = 1,$$

y vemos que alguno de los tres factores $\det C(B'', B)$, $\det C(B', B'')$ o $\det C(B, B')$ debe ser positivo, de manera que $B \sim B'$, o $B'' \sim B'$ o $B' \sim B$, como queríamos. $\square$

4.1.3. Si una orientación de un espacio vectorial está determinada por una base, es fácil exhibir a la orientación opuesta. En efecto, si V es un espacio vectorial real de dimensión $n > 0$ y $B = (v_1, \dots, v_n) \in \mathscr{B}(V)$ es base ordenada de V, entonces claramente $B' = (-v_1, v_2, \dots, v_n)$ también es una base ordenada de V y las dos orientaciones de V son $[B]$ y $[B']$. En efecto, la matriz de cambio de base es

$$C(B, B') = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

y tiene determinante negativo, de manera que las orientaciones $[B]$ y $[B']$ son distintas.

4.1.4. Toda la discusión precedente se aplica exclusivamente a espacios vectoriales reales de dimensión finita y *positiva*. Si V es un espacio vectorial de dimensión cero, convenimos en definir $\mathscr{O}(V) = \{+1, -1\}$, y si $o \in \mathscr{O}(V)$ ponemos $o_! = -o$. {p:o-zero}

Preservación de orientaciones

4.1.5. Sean V y V' son dos espacios vectoriales reales de dimensión finita n y sea $f : V \to V'$ un isomorfismo lineal.

Supongamos primero que $n > 0$. Si $B = (v_1, \dots, v_n) \in \mathscr{B}(V)$, entonces $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ es una base ordenada de V', a la que escribimos $f(B)$ y, más aún, si $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$ es otra base ordenada de V y es $B \sim B'$, entonces $f(B) \sim f(B')$ porque claramente $C(f(B), f(B')) = C(B, B')$. Esto implica que f induce una función $\mathscr{O}(f) : \mathscr{O}(V) \to \mathscr{O}(V')$ tal que $\mathscr{O}(f)([B]) = [f(B)]$ para cada base ordenada $B \in \mathscr{B}(V)$.

Si, por el contrario, $n = 0$, definimos $\mathscr{O}(f) = \mathrm{id}_{\{+1,-1\}} : \mathscr{O}(V) \to \mathscr{O}(V')$; notemos que esto tiene sentido porque $\mathscr{O}(V) = \mathscr{O}(V') = \{+1, -1\}$, de acuerdo a la convención de 4.1.4.

4.1.6. Es fácil verificar que si V es un espacio vectorial es $\mathscr{O}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\mathscr{O}(V)} : \mathscr{O}(V) \to \mathscr{O}(V)$, y que si $f : V \to V'$ y $g : V' \to V''$ son dos isomorfismos entre espacios vectoriales reales de dimensión finita, entonces $\mathscr{O}(g \circ f) = \mathscr{O}(g) \circ \mathscr{O}(f) : \mathscr{O}(V) \to \mathscr{O}(V'')$. En particular, para cada isomorfismo $f : V \to V'$ entre espacios vectoriales de dimensión finita la función $\mathscr{O}(f) : \mathscr{O}(V) \to \mathscr{O}(V')$ es una biyección.

4.1.7. Si V es un espacio vectorial real de dimensión finita y $f : V \to V$ es un automorfismo lineal, decimos que f ***preserva orientaciones*** si $\mathscr{O}(f) = \mathrm{id}_{\mathscr{O}(V)}$ y que ***invierte orientaciones*** en caso contrario. Por otro lado, Si (V, o) y (V', o') son dos espacios vectoriales orientados, decimos que un isomorfismo lineal $f : V \to V'$ ***preserva la orientación*** si $\mathscr{O}(f)(o) = o'$ e ***invierte la orientación*** si $\mathscr{O}(f)(o) \neq o'$.

4.1.8. Proposición. (i) *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y $f : V \to V$ un automorfismo. Entonces f preserva orientaciones sii* $\det f > 0$.

(ii) *Sean* (V, o) *y* (V', o') *dos espacios vectoriales orientados de dimensión positiva y sea* $f : V \to V'$ *un isomorfismo lineal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*
   (a) f *preserva la orientación;*
   (b) *para cada* $B \in o$ *y cada* $B' \in o'$*, la matriz* $\|f\|_{B,B'}$ *de* f *con respecto a las bases* B *y* B' *tiene determinante positivo;*
   (c) *existen* $B \in o$ *y* $B' \in o'$ *tales que la matriz* $\|f\|_{B,B'}$ *de* f *con respecto a las bases* B *y* B' *tiene determinante positivo;*

Demostración. *(i)* Si V tiene dimensión nula no hay nada que probar, así que supongamos que $n = \dim V > 0$. Sea $B = (v_1, \dots, v_n)$ una base ordenada de V, la matriz de cambio de base $C(B, f(B))$ es precisamente la matriz del endomorfismo f con respecto a la base B, así que $B \sim f(B)$ sii $\det f > 0$. Esto implica inmediatamente que $\mathscr{O}(f) = \mathrm{id}_{\mathscr{O}(V)}$ sii $\det f > 0$, como afirma el enunciado.

(ii) Supongamos que vale *(a)* y sean $B \in o$ y $B' \in o'$. Como f preserva la orientación, es $[f(B)] = \mathscr{O}(f)([B]) = \mathscr{O}(f)(o) = o' = [B']$ y entonces la matriz $C(B', f(B))$ tiene determinante positivo. Como esta matriz coincide con $\|f\|_{B,B'}$, vemos que vale *(b)* y, en consecuencia, que *(a)* $\Rightarrow$ *(b)*. La implicación *(b)* $\Rightarrow$ *(c)* es inmediata, ya que o y o' son conjuntos no vacíos. Para terminar, veamos que *(c)* $\Rightarrow$ *(a)*. Sean $B \in o$ y $B' \in o'$ tales que $\det \|f\|_{B,B'} > 0$. Como $C(B', f(B)) = \|f\|_{B,B'}$, esto implica que $o' = [B'] = [f(B)]\mathscr{O}(f)([B]) = \mathscr{O}(f)(o)$ y, entonces, que f preserva la orientación. □

§2. Variedades

Orientaciones

4.2.1. Sea M una variedad de dimensión n positiva. Si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es una carta de M y $x \in U$, podemos considerar la base ordenada $B^\phi_x = (\partial^\phi_1|_x, \dots, \partial^\phi_n|_x) \in \mathscr{B}(T_xM)$ de T_xM. Una función $o : M \to \bigsqcup_{x\in M} \mathscr{O}(T_xM)$ tal que $o(x) \in \mathscr{O}(T_xM)$ para cada $x \in M$ es una ***orientación*** de M si para cada $x \in M$ existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ tal que $x \in U$ y $o(y) = [B^\phi_y]$ para todo $y \in U$. Escribimos $\mathscr{O}(M)$ al conjunto de las orientaciones de M. Si $\mathscr{O}(M) \neq \varnothing$, decimos que M es ***orientable***. Finalmente, una ***variedad orientada*** es un par (M, o) formado por una variedad orientable M y una orientación $o \in \mathscr{O}(M)$. {def:orientacion:var}

{lema:oo:res}

4.2.2. Lema. *Sea* M *una variedad y sea* $o : M \to \bigsqcup_{x\in M} \mathscr{O}(T_xM)$ *una función tal que* $o(x) \in \mathscr{O}(T_xM)$ *para todo* $x \in M$*.*
(i) *Si* o *es una orientación de* M *y* $U \subseteq M$ *es un abierto, entonces* $o|_U : U \to \bigsqcup_{x\in U} \mathscr{O}(T_xU)$ *es una orientación de* U*.*
(ii) *Si* $\mathscr{U}$ *es un cubrimiento abierto de* M *tal que para cada* $U \in \mathscr{U}$ *es* $o|_U : U \to \bigsqcup_{x\in U} \mathscr{O}(T_xU)$ *una orientación de* U*,* o *es una orientación de* M

Esto tiene sentido: si $U \subseteq M$ es un abierto, entonces U es canónicamente una variedad y para cada $x \in U$ podemos identificar a T_xU con T_xM.

Demostración. *(i)* Si $x \in U$, hay una carta $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ de M tal que $x \in V \subseteq U$ y $o(y) = [B^\phi_y]$ para todo $y \in V$. Dada la forma en que construimos el atlas de U, ϕ es una carta de U. Esto nos dice que $o|U$ es una orientación de U.

(ii) Sea $x \in M$. Como $\mathscr{U}$ es un cubrimiento abierto de M, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $x \in U$, y como $o|_U$ es una orientación de U, existe una carta $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ de U tal que $x \in V$ y $o(y) = [B^\phi_y]$ para todo $y \in V$. La función ϕ también es una carta de M: se sigue de esto inmediatamente que o es una orientación de M. □

4.2.3. Corolario. *Si M es una variedad orientable y $U \subseteq M$ es un abierto, entonces U es una variedad orientable.*

Demostración. Por hipótesis, existe una orientación $o : M \to \bigsqcup_{x\in M} \mathscr{O}(T_xM)$. Identificando como siempre a T_xU con T_xM para cada $x \in M$, restringiendo a o obtenemos una función $o|_U : U \to \bigsqcup_{x\in U} T_xU$ que, de acuerdo a la primera parte de la proposición, es una orientación de U. Vemos así que $\mathscr{O}(U) \neq \varnothing$. □

4.2.4. Proposición. *Dos orientaciones de una variedad conexa que coinciden en un punto son iguales.*

Demostración. Sea M una variedad y sean $o, o' \in \mathscr{O}(M)$ dos orientaciones de M que coinciden en un punto. Sea $A = \{x \in M : o(x) = o'(x)\}$, que por hipótesis es un conjunto no vacío. Para probar la proposición bastará que mostremos que A es abierto y cerrado en M, ya que M es conexa.

Sea $x \in M$. Por hipótesis, existen cartas $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ tales que $x \in U \cap V$, $o(y) = [B^\phi_y]$ para todo $y \in U$ y $o'(y) = [B^\psi_y]$ para todo $y \in V$. De acuerdo a la Proposición 3.1.6, si llamamos $\psi_1, \dots, \psi_n : V \to \mathbb{R}$ a las componentes de ψ, entonces para cada $y \in U \cap V$ es

$$\partial^\phi_i|_y = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi_j \circ \phi^{-1})}{\partial y_i}\Big|_{\phi(y)} \partial^\psi_j|_y,$$

y entonces

$$o(y) = o'(y) \iff \det C(B^\psi_y, B^\phi_y) = \det\Big(\frac{\partial(\psi_j \circ \phi^{-1})}{\partial y_i}\Big|_{\phi(y)}\Big)_{i,j} > 0. \tag{14}$$ {eq:oo}

Como el determinante $\det C(B^\psi_y, B^\phi_y)$ es una función continua de $y \in U \cap V$ y el punto x está en $U \cap V$, existe un entorno $W \subseteq U \cap V$ de x tal que el signo de $\det C(B^\psi_y, B^\phi_y)$ no cambia en W. Si es allí positivo, entonces (14) nos dice que $o(y) = o'(y)$ para todo $y \in W$ y que entonces $x \in W \subseteq A$; si, en cambio, este determinante es negativo en W, la misma equivalencia nos dice que $o(y) \neq o'(y)$ para todo $y \in W$ y que entonces $x \in W \subseteq M \setminus A$.

En cualquier caso, vemos que A y $M \setminus A$ son abiertos de M, como queríamos. □

4.2.5. Usando esta proposición, podemos probar el análogo de la Proposición 4.1.2 para variedades *conexas*:

{corolario:oo-dos}

Corolario. *Una variedad conexa orientable tiene exactamente dos orientaciones.*

Demostración. Sea M una variedad conexa y sean $o, o', o'' \in \mathscr{O}(M)$ tres orientaciones de M. Si $x \in M$, dos de las tres orientaciones $o(x)$, $o'(x)$ y $o''(x)$ de T_xM tienen que concidir y, sin pérdida de generalidad podemos suponer que son las dos primeras. La proposición, implica entonces que, de hecho, $o = o'$. El corolario es consecuencia inmediata de esto. □

4.2.6. Más generalmente, tenemos el siguiente resultado:

{corolario:oo-nc}

Corolario. *Sea M una variedad y sea $\{M_i\}_{i\in I}$ el conjunto de sus componentes conexas.*

(i) *Una función $o : M \to \bigsqcup_{x\in M} \mathscr{O}(T_xM)$ es una orientación de M si y solamente si para cada $i \in I$ la restricción $o|_{M_i} : M_i \to \bigsqcup_{x\in M_i} \mathscr{O}(T_xM_i)$ es una orientación de M_i.*

(ii) *M tiene $2^{|I|}$ orientaciones.*

Notemos que la primera parte tiene sentido porque, como M es localmente conexa, las componentes M_i son abiertos de M así que, en particular, son canónicamente variedades y $T_xM = T_xM_i$ para todo $i \in I$ y todo $x \in M_i$.

Demostración. *(i)* Esto es consecuencia directa del Lema 4.2.2, ya que $\{M_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de M.

(ii) De acuerdo a la primera parte, hay una función $q : \mathscr{O}(M) \to \prod_{i\in I} \mathscr{O}(M_i)$ tal que si $o \in \mathscr{O}(M)$ para todo $i \in I$ la componente i-ésima de $q(o)$ es $o|_{M_i}$. Esta función es inyectiva porque una orientación queda evidentemente determinada por sus restricciones a los elementos de $\{M_i\}_{i\in I}$. Es también sobreyectiva: si $(o_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{O}(M_i)$, entonces existe exactamente una función $o : M \to \bigsqcup_{x\in M} \mathscr{O}(T_xM)$ tal que $o|_{M_i} = o_i$ para todo $i \in I$, ya que el conjunto $\{M_i\}_{i\in M}$ es una *partición* de M. Otra vez de acuerdo a la primera parte del corolario, sabemos que o es una orientación para M y claramente $q(o) = (o_i)_{i\in I}$.

Esto implica que $|\mathscr{O}(M)| = \prod_{i\in I} |\mathscr{O}(M_i)| = 2^{|I|}$, ya que $|\mathscr{O}(M_i)| = 2$ para todo $i \in I$. □

4.2.7. Proposición. *Si M es una variedad y $o : M \to \sqcup_{x\in M}\mathscr{O}(T_xM)$ es una orientación de M, entonces la función $o_! : x \in M \mapsto o(x)_! \in \sqcup_{x\in M}\mathscr{O}(T_xM)$ es otra orientación de M* distinta *de o y, entonces, $\mathscr{O}(M) = \{o, o_!\}$.*

En esta situación, decimos que $o_!$ es la ***orientación de M opuesta*** a o.

Demostración. **Hacer** □

4.2.8. La siguiente construcción va a ser usada repetidas veces en lo que sigue:

{lema:o-phi}

Lema. *Sea M una variedad de dimensión n. Si $x \in M$ y $o \in \mathscr{O}(T_xM)$, entonces existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M tal que $x \in U$ y $o = [B_x^\phi]$.*

Demostración. **Hacer** □

Preservación de orientaciones

4.2.9. **Hacer**: Funciones entre variedades que preservan la orientacion

4.2.10. **Hacer**: El conjunto de puntos del dominio de un difeo local $f : M \to N$ entre variedades orientadas sobre los que f preserva la orientación es un abierto. {prop:o-preservar}

§3. Atlas orientados

4.3.1. Si M es una variedad de dimensión positiva n y $\mathscr{A}$ es el atlas maximal de M, un subatlas $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}$ es un ***atlas orientado*** si para cada par de cartas $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ de $\mathscr{A}'$ se tiene que para todo $x \in \phi(U \cap V)$ la diferencial $D_x(\psi \circ \phi^{-1}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tiene determinante positivo. Decimos que $\mathscr{A}'$ es un ***atlas orientado maximal*** si no está incluido propiamente en ningún otro atlas orientado contenido en $\mathscr{A}$.

{prop:oo-ao}

4.3.2. Proposición. *Sea M una variedad de dimensión positiva n. Si o es una orientación de M, hay un atlas orientado maximal $\mathscr{A}^o$ tal que para cada carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de $\mathscr{A}^o$ y cada $x \in U$ se tiene que $[B_x^\phi] = o(x)$.*

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ el atlas maximal de M. Sea $o : M \to \bigsqcup_{x\in M} \mathscr{O}(T_xM)$ una orientación de M y sea $\mathscr{A}^o$ el conjunto de las cartas $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de $\mathscr{A}$ tales que para cada $x \in U$ es $o(x) = [B_x^\phi]$. Si $x \in M$, existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M tal que $x \in U$ y $o(y) = [B_y^\phi]$ para todo $y \in U$, precisamente porque o es una orientación, y entonces ϕ está en $\mathscr{A}^o$. Vemos así que los dominios de los elementos de $\mathscr{A}^o$ cubren M y, entonces, que $\mathscr{A}^o$ es un subatlas de $\mathscr{A}$. Por otro lado, si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ son dos elementos de $\mathscr{A}^o$ y $x \in \phi(U \cap V)$, entonces $[B_{\phi(x)}^\phi] = o(x) = [B_{\phi(x)}^\psi]$ y, en consecuencia, la matriz jacobiana en $\phi(x)$ de la composición $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$, que concide con la matriz de cambio de base $C(B_{\phi(x)}^\phi, B_{\phi(x)}^\psi)$, tiene determinante positivo. Esto nos dice que $\mathscr{A}^o$ es un atlas orientado.

Se trata, de hecho, de un atlas orientado maximal: para ver esto tenemos que mostrar que si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es una carta de $\mathscr{A}$ que no está en $\mathscr{A}^o$, entonces $\mathscr{A}^o \cup \{\phi\}$ no es un atlas orientado. Ahora bien, como $\phi \notin \mathscr{A}^o$, existe un punto $x \in U$ tal que $[B_x^\phi] \neq o(x)$ y, en consecuencia, si $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ es una carta de $\mathscr{A}^o$ tal que $x \in V$, tenemos que $[B_x^\phi] \neq [B_x^\psi]$ y que la matriz jacobiana de la función $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ en $\phi(x)$, que coincide con la matriz de cambio de base $C(B_x^\phi, B_x^\psi)$, tiene determinante negativo. Esto significa que $\mathscr{A}^o \cup \{\phi\}$ no es un atlas orientado. □

4.3.3. Proposición. *Sea M una variedad de dimensión positiva n.*

{prop:oo-at:1}

(i) *La función que a cada orientación o de M le asigna el atlas orientado maximal $\mathscr{A}^o$ es una biyección entre el conjunto de orientaciones de M y el de los atlas orientados maximales de M.*

{prop:oo-at:2}

(ii) *Todo atlas orientado de M está contenido en un atlas orientado maximal de M.*

Demostración. Sea $\mathscr{A}^+$ un atlas orientado sobre M. Si $x \in M$ y $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ son dos cartas de $\mathscr{A}^+$ tales que $x \in U \cap V$, entonces $[B_x^\phi] = [B_x^\psi]$, ya que la matriz $C(B_x^\phi, B_x^\psi)$ es precisamente la matriz jacobiana de la composición $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ evaluada en $\phi(x)$ y, por hipótesis, ésta tiene determinante positivo. Esto significa que podemos definir una función $o(\mathscr{A}^+) : M \to \bigsqcup_{x\in M} \mathscr{O}(T_xM)$ poniendo, para cada $x \in M$, $o(\mathscr{A}^+)(x) = [B_x^\phi]$ para $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta cualquiera de $\mathscr{A}^+$ tal que $x \in U$: en efecto, esto está bien definido por que, por un lado, los dominios de los elementos de $\mathscr{A}^+$ cubren M y, por otro, porque la orientación $[B_x^\phi]$ depende solamente de x y no de la carta ϕ elegida. Notemos que $o(\mathscr{A}^+)$ es una orientación simplemente por la forma en que fue construida.

Afirmamos que la función $o \mapsto \mathscr{A}^o$ del conjunto de orientaciones de M al de los atlas orientados maximales de M que construimos en la prueba de la Proposición 4.3.2 y la función $\mathscr{A}^+ \mapsto o(\mathscr{A}^+)$ en dirección contraria son biyecciones inversas: la parte *(i)* del enunciado sigue de esto.

Sea primero o una orientación de M. Si $x \in M$ y $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es una carta de $\mathscr{A}^o$ tal que $x \in U$, la construcción de $\mathscr{A}^o$ implica que $o(x) = [B_x^\phi]$ y la de $o(\mathscr{A}^o)$ que $o(\mathscr{A}^o) = [B_x^\phi]$. Las dos orientaciones o y $o(\mathscr{A}^o)$ coinciden en todo punto de M, así que son iguales.

Sea ahora $\mathscr{A}^+$ un atlas orientado y mostremos que $\mathscr{A}^+ \subseteq \mathscr{A}^{o(\mathscr{A}^+)}$; esto probará la afirmación *(ii)* del enunciado, porque $\mathscr{A}^{o(\mathscr{A}^+)}$ es un atlas orientado maximal. Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de $\mathscr{A}^{o(\mathscr{A}^+)}$ y sea $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ una carta de $\mathscr{A}^+$. Si $x \in U \cap V$, entonces $[B_x^\phi] = o(\mathscr{A}^+)(x) = [B_x^\psi]$, así que la matriz jacobiana de la función de transición $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ evaluada en $\phi(x)$, que es la matriz de cambio de base $C(B_x^\phi, B_x^\psi)$, tiene determinante positivo: esto implica que $\mathscr{A}^{o(\mathscr{A}^+)} \cup \{\psi\}$ es un atlas orientado, y la maximalidad de $\mathscr{A}^{o(\mathscr{A}^+)}$ implica a su vez que entonces $\psi \in \mathscr{A}^{o(\mathscr{A}^+)}$.

Si suponemos además que $\mathscr{A}^+$ es un atlas orientado *maximal* lo que acabamos de probar implica que $\mathscr{A}^+ = \mathscr{A}^{o(\mathscr{A}^+)}$, completando la prueba de *(ii)*. $\square$

4.3.4. Corolario. *Existen atlas orientados sobre una variedad sii ésta es orientable y, si además es conexa, en ese caso existen exactamente dos atlas orientados maximales.*

De hecho, esta afirmación puede generalizarse a un resultado análogo al enunciado en el Corolario 4.2.6.

Demostración. La segunda afirmación del corolario sigue inmediatamente de 4.3.3*(i)* y del Corolario 4.2.5. Veamos la primera. Si una variedad es orientable, posee orientaciones y 4.3.3*(i)* nos dice que existen atlas orientados maximales sobre ella. Recíprocamente, si la variedad posee un atlas orientado, posee un atlas orientado maximal por 4.3.3*(ii)* y entonces por 4.3.3*(i)* también posee orientaciones, esto es, es orientable. $\square$

§4. Formas de volumen

4.4.1. **HACER**

§5. El revestimiento doble de una variedad

4.5.1. Sea M una variedad de dimensión n, sea $\mathscr{A}$ su atlas y consideremos el conjunto {p:doble}

$$\tilde{M} = \{(x, o) : x \in M, o \in \mathscr{O}(T_x M)\}.$$

Para cada carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ ponemos $\tilde{U}^\phi = \{(x, [B_x^\phi]) \in \tilde{M} : x \in U\}$ y consideramos la función $\tilde{\phi} : (x, o) \in \tilde{U}^\phi \mapsto \phi(x) \in \mathbb{R}^n$. Veamos que el conjunto

$$\tilde{\mathscr{A}} = \{\tilde{\phi}_i : \tilde{U}^\phi \to \mathbb{R}^n : \phi : U \to \mathbb{R}^n \text{ es una carta de } M\}$$

satisface las condiciones de la Proposición 1.2.4:

- Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M. Si (x, o), $(x', o') \in \tilde{U}^\phi$ son tales que $\tilde{\phi}(x, o) = \tilde{\phi}(x', o')$, entonces $\phi(x) = \phi(x')$ y, como ϕ es inyectiva, es $x = x'$. Ahora, como (x, o), $(x', o') \in \tilde{U}^\phi$ es $o = [B_x^\phi]$ y $o' = [B_{x'}^\phi]$, así que también $o = o'$, y vemos que $\tilde{\phi}$ es inyectiva. Por otro lado, la imagen de $\tilde{\phi}$ es $\phi(U)$, que es un abierto de $\mathbb{R}^n$.
- Sean $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ dos cartas de M. Es

$$(x, o) \in \tilde{U}^\phi \cap \tilde{V}^\psi \iff x \in U \cap V \text{ y } o = [B_x^\phi] = [B_x^\psi],$$

así que, si ponemos $W = \{x \in U \cap V : \det\left(\frac{\partial(\psi_j \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\big|_{\phi(x)}\right)_{i,j} > 0\}$, es

$$\tilde{U}^\phi \cap \tilde{V}^\psi = \{(x, [B_x^\phi]) \in \tilde{M} : x \in W\}.$$

Se sigue de esto que $\tilde{\phi}(\tilde{U}^\phi \cap \tilde{V}^\psi) = \phi(W)$, y esto es un abierto de $\mathbb{R}^n$ porque W es un abierto de U. De la misma forma, es $\tilde{\psi}(\tilde{U}^\phi \cap \tilde{V}^\psi) = \psi(W)$, y es fácil ver que la composición

$$\phi(W) = \tilde{\phi}(\tilde{U}^\phi \cap \tilde{V}^\psi) \xrightarrow{\tilde{\phi}^{-1}} \tilde{U}^\phi \cap \tilde{V}^\psi \xrightarrow{\tilde{\psi}} \tilde{\phi}(\tilde{U}^\phi \cap \tilde{V}^\psi) = \psi(W)$$

es simplemente la función $x \in \phi(W) \mapsto (\psi \circ \phi^{-1})(x) \in \psi(W)$, que es diferenciable.
- Sean otra vez $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ dos cartas de M. Queremos mostrar que el conjunto

$$\Delta = \{(a, b) \in \tilde{\phi}(\tilde{U}^\phi) \times \tilde{\psi}(\tilde{V}^\psi) : \tilde{\phi}^{-1}(a) = \tilde{\psi}^{-1}(b)\}$$

es un cerrado de $\tilde{\phi}(\tilde{U}^\phi) \times \tilde{\psi}(\tilde{V}^\psi) = \phi(U) \times \psi(V)$.

Sea entonces $(a, b) \in \phi(U) \times \psi(V)$ y supongamos que $(a, b) \notin \Delta$, de manera que $\tilde{\phi}^{-1}(a) \neq \tilde{\psi}^{-1}(b)$. Si $\phi^{-1}(a) \neq \psi^{-1}(b)$, existen abiertos $R \subseteq \phi(U)$ y $S \subseteq \psi(V)$ tales que $a \in R$, $b \in S$ y $\phi^{-1}(R) \cap \psi^{-1}(S) = \varnothing$: esto implica que $R \times S$ es un entorno abierto de (a, b) contenido en $\phi(U) \times \psi(V)$ tal que $\phi^{-1}(R) \cap \psi^{-1}(S) = \varnothing$ y entonces $\Delta \cap (R \times S) = \varnothing$. Si, en cambio, es $\phi^{-1}(a) = \psi^{-1}(b)$, debe ser $[B_{\phi^{-1}(a)}^\phi] \neq [B_{\psi^{-1}(b)}^\psi]$. La igualdad nos dice que $a \in \phi(U \cap V)$ y $b \in \psi(U \cap V)$ y la desigualdad que existe un abierto $W \subseteq \phi(U \cap V)$ tal que $a \in W$ y $\det\left(\frac{\partial(\psi_j \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\big|_c\right)_{i,j} < 0$ para cada $c \in W$. Como $b \in (\psi \circ \phi^{-1})(W) \subseteq \psi(U \cap V)$, el conjunto $T = W \times (\psi \circ \phi^{-1})(W)$ es un entorno abierto de (a, b) contenido en $\phi(U) \times \psi(V)$, y la elección de W implica que $\Delta \cap T = \varnothing$. En cualquier caso, concluimos que el conjunto Δ es disjunto de un entorno de (a, b), así que Δ es cerrado.
- Sabemos que existe un subatlas $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}$ que es *numerable*. Para cada carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M sea $\phi_! = \tau \circ \phi : U \to \mathbb{R}^n$ la composición de ϕ con la función lineal $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que, con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$, tiene matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato verificar que $\mathscr{A}'' = \mathscr{A}' \cup \{\phi_! : \phi \in \mathscr{A}'\} \subseteq \mathscr{A}$ y claramente $\mathscr{A}''$ es numerable. Mostremos que los dominios de las funciones de $\tilde{\mathscr{A}}'' = \{\tilde{\phi} : \phi \in \mathscr{A}''\} \subseteq \tilde{\mathscr{A}}$ cubren $\tilde{M}$. Sea $(x, o) \in \tilde{M}$ y sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M tal que $x \in U$. Si $o = [B_x^\phi]$, entonces

$(x, o) \in \tilde{U}^\phi$; si, por el contrario, $o \neq [B_x^\phi]$ entonces es inmediato que $o = [B_x^{\phi!}]$, de manera que $(x, o) \in \tilde{U}^{\phi!}$. En cualquier caso, los dominios de los elementos de $\tilde{\mathscr{A}}''$ cubren $\tilde{M}$, como queríamos.

En vista de todo esto, la Proposición 1.2.4 nos dice que hay sobre $\tilde{M}$ una topología para la que $\tilde{\mathscr{A}}$ es un atlas sobre $\tilde{M}$ y que hace, entonces, de $\tilde{M}$ una variedad de la misma dimensión que M.

4.5.2. Orientar una variedad es hacer una elección de orientación del espacio tangente en cada uno de sus puntos, y en general no hay ninguna forma preferida de hacer esto: es por eso que hay variedades que no son orientables. En el caso de la variedad $\tilde{M}$, en cambio, casi podemos decir que cada punto lleva asociada una orientación, y elaborando esta observación podemos ver que, de hecho, es siempre orientable.

Proposición. *La variedad $\tilde{M}$ es orientable.*

De los detalles de la prueba se seguirá, de hecho, que $\tilde{M}$ posee una orientación canónica, en el sentido de que no depende de ninguna elección.

Demostración. Si $(x, o) \in \tilde{M}$, el Lema 4.2.8 nos dice que existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M tal que $x \in U$ y $o = [B_x^\phi]$, y la construcción hecha de la estructura de variedad de $\tilde{M}$ nos provee entonces de una carta $\tilde{\phi} : \tilde{U}^\phi \to \mathbb{R}^n$ de $\tilde{M}$ tal que $(x, o) \in \tilde{U}^\phi$. La orientación $[B_{(x,o)}^{\tilde{\phi}}]$ de $T_{(x,o)}\tilde{M}$ depende solamente de (x, o) y no de la carta ϕ elegida. En efecto, si $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ es otra carta de M tal que $x \in V$ y $o = [B_x^\psi]$, y si $\tilde{\psi} : \tilde{V}^\psi \to \mathbb{R}^n$ es la correspondiente carta de $\tilde{M}$ alrededor de (x, o), entonces $[B_{(x,o)}^{\tilde{\psi}}] = [B_{(x,o)}^{\tilde{\phi}}]$. Para probar esto, tenemos que mostrar que la matriz jacobianda de la función de transición $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}$ en $\tilde{\phi}(x, o)$ tiene determinante positivo; en el segundo punto de las verificaciones hechas en 4.5.1 vimos que esta función de transición es, de hecho, igual a $\psi \circ \phi^{-1}$, y su matriz jacobiana tiene entonces determinante positivo en $\phi(x) = \tilde{\phi}(x, o)$ porque $[B_x^\phi] = [B_x^\psi]$.

Podemos entonces definir una función $O : \tilde{M} \to \coprod_{(x,o)\in\tilde{M}} \mathscr{O}(T_{(x,o)}\tilde{M})$ de manera que para cada $(x, o) \in \tilde{M}$ sea $O(x, o) = [B_{(x,o)}^{\tilde{\phi}}]$ con $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta cualquiera de M tal que $x \in U$ y $o = [B_x^\phi]$. Para probar la proposición, mostremos que esta función O es, de hecho, una orientación de $\tilde{M}$.

Sea $(x, o) \in \tilde{M}$. Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M tal que $x \in U$ y $o = [B_x^\phi]$, y sea $\tilde{\phi} : \tilde{U}^\phi \to \mathbb{R}^n$ la carta correspondiente de $\tilde{M}$ alrededor de (x, o). Lo que queremos quedará probado si mostramos que $O(x', o') = [B_{(x',o')}^{\tilde{\phi}}]$ para todo $(x', o') \in \tilde{U}^\phi$. Según la definición de la función O y como $x' \in U$ para cada $(x', o') \in \tilde{U}^\phi$, para esto es suficiente que mostremos que para cada $(x', o') \in \tilde{U}^\phi$ es $o' = [B_{x'}^\phi]$: pero esto es inmediato de la definición del conjunto $\tilde{U}^\phi$. $\square$

4.5.3. Proposición. *La función $p : (x, o) \in \tilde{M} \mapsto x \in M$ es diferenciable y, de hecho, es un revestimiento regular de M de dos hojas. Su grupo de transformaciones de cubrimiento es cíclico de orden 2.*

Demostración. Sea $(x, o) \in \tilde{M}$. Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M tal que $x \in U$ y $o = [B_x^\phi]$, y sea $\tilde{\phi} : \tilde{U}^\phi \to \mathbb{R}^n$ la carta correspondiente de $\tilde{M}$ alrededor de (x, o). Entonces $p(\tilde{U}^\phi) = U$ y la composición

$$\phi(U) = \tilde{\phi}(\tilde{U}^\phi) \xrightarrow{\tilde{\phi}^{-1}} \tilde{U}^\phi \xrightarrow{p} U \xrightarrow{\phi} \phi(U)$$

es simplemente la función identidad $\mathsf{id}_{\phi(U)}$ del abierto $\phi(U)$, que es, por supuesto, diferenciable. Esto nos dice que p es una función diferenciable.

La función $p : \tilde{M} \to M$ es claramente sobreyectiva. Para ver que es un cubrimiento [Mun75, Ch. 9, §53], tenemos que mostrar que todos los puntos de M tienen un entorno que está «bien cubierto» por p. Sea $x \in M$ y sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M tal que $x \in U$. Sea $\phi_! : U \to \mathbb{R}^n$ la carta construida al final de 4.5.1. Para cada $x \in U$ las orientaciones $[B_x^\phi]$ y $[B_x^{\phi_!}]$ de T_xM son distintas; esto implica que $p^{-1}(U) = \tilde{U}^\phi \cup \tilde{U}^{\phi_!}$ y que la unión es disjunta. Por la forma en que fue construida la topología de $\tilde{M}$, los conjuntos $\tilde{U}^\phi$ y $\tilde{U}^{\phi_!}$ son abiertos. Para concluir, hay que mostrar que la restricción $p : \tilde{U}^\phi \to U$, que es una biyección continua, es un homeomorfismo y para eso basta observar que la composición con el homeomorfismo $\phi : U \to \phi(U)$ es $\tilde{\phi}$, que es un homeomorfismo.

Sea ahora $G = \mathsf{Aut}(p)$ el grupo de transformaciones de revestimiento [Mun75, Ch. 13, §81] de p, esto es, el grupo de los homeomorfismos $f : \tilde{M} \to \tilde{M}$ tales que $p \circ f = p$. Como G actúa fielmente sobre cada fibra de p y éstas tienen dos puntos, G tiene a lo sumo dos elementos y si exhibimos un elemento no trivial probaremos que $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y, automáticamente, que p es un cubrimiento regular.

Consideremos la función $\sigma : (x, o) \in \tilde{M} \mapsto (x, o_!) \in \tilde{M}$. Es inmediato que $p \circ \sigma = p$ y que $\sigma^2 = \mathsf{id}_{\tilde{M}}$, de manera que σ es su propia función inversa; por otro lado, $\sigma \neq \mathsf{id}_{\tilde{M}}$ porque cualquiera sea $(x, o) \in \tilde{M}$ es $(x, o) \neq (x, o_!)$. Para mostrar que σ es un elemento no trivial de G bastará entonces que mostremos que es continua —de hecho, mostraremos que es una función diferenciable.

Sea $(x, o) \in \tilde{M}$. Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M tal que $x \in U$ y $o = [B_x^\phi]$, y sea $\tilde{\phi} : \tilde{U}^\phi \to \mathbb{R}^n$ la carta correspondiente de $\tilde{M}$ alrededor de (x, o). Usando la contrucción del final de 4.5.1, tenemos una carta $\phi_! : U \to \mathbb{R}^n$ tal que $o_! = [B_x^{\phi_!}]$, y entonces la carta $\tilde{\phi}_! : \tilde{U}^{\phi_!} \to \mathbb{R}$ de $\tilde{M}$ tiene a $(x, o_!)$ en su dominio. Más aún, es claro que si $(x, o) \in \tilde{M}$ se tiene que $(x, o) \in \tilde{U}^\phi \iff (x, o_!) \in \tilde{U}^{\phi_!}$ y, en particular, que $\sigma(\tilde{U}^\phi) = \tilde{U}^{\phi_!}$. La composición

$$\phi(U) = \tilde{\phi}(\tilde{U}^\phi) \xrightarrow{\tilde{\phi}^{-1}} \tilde{U}^\phi \xrightarrow{\sigma} \tilde{U}^{\phi_!} \xrightarrow{\tilde{\phi}_!} \tilde{\phi}_!(\tilde{U}^{\phi_!}) = \phi(U)$$

es la función identidad de $\phi(U)$, que es diferenciable, Esto nos dice que σ es diferenciable en (x, o) y, en definitiva, que la función σ es diferenciable. □

4.5.4. Podemos traducir la orientabilidad de M en términos de propiedades geométricas del revestimiento $p : \tilde{M} \to M$. Recordemos que una ***sección*** de p sobre un subconjunto U de M es una función $s : U \to \tilde{M}$ tal que $p \circ s = \mathsf{id}_U$, y escribamos $\Gamma(p, U)$ al conjunto de todas las secciones *continuas* de p sobre U.

Proposición. *Sea M una variedad y sea $p : \tilde{M} \to M$ el revestimiento construido arriba.*

(i) *Si $U \subseteq M$ es un abierto, hay una biyección entre el conjunto $\Gamma(p, U)$ de las secciones continuas de p sobre U y el conjunto $\mathscr{O}(U)$ de las orientaciones de U.* {prop:orc}

(ii) *Si M es conexa, entonces M es orientable sii $\tilde{M}$ es desconexa, y en ese caso $\tilde{M} \cong M \sqcup M$, una unión disjunta de dos copias de M.*

Demostración. *(i)* Fijemos un abierto $U \subseteq M$; como siempre, identificamos para cada $x \in U$ a los espacios T_xU y T_xM. Si $s : U \to \tilde{M}$ es una función arbitraria tal que $p \circ s = \mathsf{id}_U$, existe una única función $\pi(s) : U \to \bigsqcup_{x\in U} \mathscr{O}(T_xM)$ tal que $s(x) = (x, \pi(s)(x))$ para todo $x \in U$, y esta función $\pi(s)$ es tal que $\pi(s)(x) \in \mathscr{O}(T_xM)$ para todo $x \in U$.

Supongamos ahora que $s : U \to \tilde{M}$ es además continua, de manera que $s \in \Gamma(p, U)$. Sea $x \in U$, sea $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ una carta de M con dominio arco-conexo y tal que $x \in V \subseteq U$ y $[B_x^\phi] = \pi(s)(x)$, y sea $\tilde{\phi} : \tilde{V}^\phi \to \mathbb{R}^n$ la carta correspondiente de $\tilde{M}$. La función $t : y \in V \mapsto (y, [B_y^\phi]) \in \tilde{M}$ tiene imagen contenida en $\tilde{V}^\phi$ y es $\tilde{\phi} \circ t = \phi$, así que t es continua; además, es $p \circ t = \mathrm{id}_V$. Si $i : V \hookrightarrow M$ es la inclusión de V en M, entonces las dos funciones $s|_V, t : V \to \tilde{M}$ son levantados de i a lo largo de p que toman el mismo valor en x, así que la unicidad para levantados [Mun75, Ch. 13, Lemma 79.1] implica que $s|_V = t$ y entonces tenemos que $\pi(s)(y) = [B_y^\phi]$ para todo $y \in V$. Vemos así que $\pi(s)$ es una orientación de U y, en conclusión, tenemos bien definida una función $\pi : \Gamma(p, U) \to \mathscr{O}(U)$. Su definición have evidente que se trata de una función inyectiva.

Mostremos que es sobreyectiva. Sea $o : U \to \bigsqcup_{x\in U} \mathscr{O}(T_xM)$ una orientación de U y consideremos la función $s : x \in U \mapsto (x, o(x)) \in \tilde{M}$. Es claro que $\pi(s) = o$, así que solo tenemos que mostrar que s es continua para que saber que $s \in \Gamma(p, U)$.

Sea $x \in U$. Como o es una orientación de U, existe una carta $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ con dominio conexo tal que $x \in V \subseteq U$ y $o(y) = [B_y^\phi]$ para todo $y \in V$, y sea $\tilde{\phi} : \tilde{V}^\phi \to \mathbb{R}^n$ la carta de $\tilde{M}$ correspondiente a ϕ. Es $s(V) \subseteq \tilde{V}^\phi$: en efecto, es claro que $s(V) \subseteq p^{-1}(V) = \tilde{V}^\phi \cup \tilde{V}^{\phi^!}$, y como $\tilde{V}^\phi$ y $\tilde{V}^{\phi^!}$ son conexos disjuntos, la imagen $s(V)$, que es conexa, está contenida en alguno de los dos y tiene que ser el primero porque $(x, o(x)) \in s(V) \cap \tilde{V}^\phi$. Por otro lado, la composición $\tilde{\phi} \circ s|_V : V \to \mathbb{R}^n$ es continua, así que $s|_V : V \to \tilde{M}$ es continua, esto es, s es continua en un entorno de x y vemos así que s es continua, como queríamos

(ii) **Hacer** □

4.5.5. Corolario. (i) *Una variedad simplemente conexa es orientable.*

(ii) *Más generalmente, una variedad conexa cuyo grupo fundamental no contiene un subgrupo de índice 2 es orientable.*

Notemos que una variedad conexa es arco-conxa, así que la condición de *(ii)* no depende del punto base elegido para calcular el grupo fundamental.

Demostración. Basta probar la segunda afirmación, ya que la primera es un caso particular de ella. Sea entonces M una variedad conexa tal que $\pi_1(M)$ no tiene subgrupos de índice 2. Como hay una biyección entre las clases de isomorfismo de los revestimientos conexos de M de dos hojas y los subgrupos de $\pi_1(M)$ de índice 2 [Mun75, Ch. 13, Thms. 79.4 y 82.1], la hipótesis implica que el revestimiento $p : \tilde{M} \to M$ no puede ser conexo. Que M es orientable sigue inmediatamente de 4.5.4*(ii)*. □

§6. Ejemplos

Variedades paralelizables

{prop:oo-paralelizable}

4.6.1. Proposición. *Una variedad paralelizable es orientable.*

Demostración. **Hacer** □

Subvariedades

4.6.2. Proposición. *Sean M una variedad orientable de dimensión m y $N \subseteq M$ una subvariedad de codimensión k. Si existen campos $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ tales que para cada $x \in N$ los vectores $X_{1x}, \dots, X_{kx} \in T_xM$ generan un subespacio de T_xM complementario a T_xN, entonces N es orientable.*

Demostración. **Hacer** $\square$

4.6.3. Un caso especial de la proposición que es particularmente útil es el siguiente:

Corolario. *Si M es una variedad orientable y $f : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable que tiene a 0 como valor regular, entonces la subvariedad $N = f^{-1}(0)$ es orientable.*

Demostración. **Hacer** $\square$

4.6.4. Se sigue inmediatamente de este corolario que, por ejemplo, las esferas $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ son variedades orientables.

Productos cartesianos

4.6.5. Proposición. *Sean M y N dos variedades no vacías. El producto cartesiano $M \times N$ es orientable sii M y N lo son.*

Demostración. **Hacer** $\square$

El fibrado tangente

4.6.6. **Hacer**: El fibrado tangente es siempre orientable.

4.6.7. **Hacer**: Un fibrado asociado al fibrado tangente que tiene fibra orientable es orientable cuando la base es orientable.

Cocientes

4.6.8. Proposición. *Sea M una variedad conexa y orientable y sea G un grupo que actúa sobre M por difeomorfismos de manera propiamente discontinua. La variedad cociente M/G es orientable sii todo elemento de G preserva las orientaciones de M.*

Demostración. Sea $p : M \to M/G$ la proyección canónica, que es un difeomorfismo local. Supongamos primero que M es orientable y que todo elemento de G preserva las orientaciones de M, y fijemos una orientación $o \in \mathscr{O}(M)$.

Si $x \in M$ y $g \in G$, las funciones $p_{*x} : T_xM \to T_{p(x)}(M/G)$ y $p_{*g(x)} : T_{g(x)}M \to T_{p(x)}(M/G)$ son isomorfismos y, como $p \circ g = p$ y $\mathscr{O}(g_{*x})(o(x)) = o(g(x))$ porque g preserva la orientación, es

$$\mathscr{O}(p_{*x})(o(x)) = \mathscr{O}((p \circ g)_{*x})(o(x)) = \mathscr{O}(p_{*g(x)})\big(\mathscr{O}(g_{*x})(o(x))\big) = \mathscr{O}(p_{*g(x)})(o(g(x))).$$

Esto nos dice que hay una función $o' : M/G \to \bigsqcup_{\xi \in M/G} T_\xi(M/G)$ tal que para cada $x \in M$ es $o'(p(x)) = \mathscr{O}(p_{*x})(o(x))$.

Sea $\xi \in M/G$ y sea $x \in M$ tal que $p(x) = \xi$. Como la acción de G es propiamente discontinua, existe un abierto $U \subseteq M$ tal que $x \in U$ y si $g \in G$ es $g(U) \cap U \neq \varnothing$ sii $g = e$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que hay una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M y, más aún, que para cada $y \in U$ es $o(y) = [B^\phi_y]$. Recordemos que en $p(U)$ es un abierto de M/G, que la función $p|_U : U \to p(U)$ es un difeomorfismo, y que la composición $\psi = \phi \circ (p|_U)^{-1} : p(U) \to \mathbb{R}^n$ es una carta de M/G cuyo dominio contiene a ξ y tal que $p_{*y}(\partial^\phi_{x_i}|_y) = \partial^\psi_{x_i}|_{p(y)}$ para cada $y \in U$ y cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Se sigue de esto que si $\zeta \in p(U)$ e $y \in U$ es tal que $p(y) = \zeta$, entonces

$$[B^\psi_\zeta] = [B^\psi_{p(y)}] = \mathscr{O}(p_{*y})([B^\phi_y]) = \mathscr{O}(p_{*y})(o(y)) = o'(\zeta),$$

y esto muestra que o' es una orientación de M/G, que entonces es una variedad orientable.

Recíprocamente, supongamos que M y M/G son orientables y sea $g \in G$. Fijemos una orientación $o \in \mathscr{O}(M)$ y sea $o' \in \mathscr{O}(M/G)$ una orientación de M/G tal que el conjunto

$$\{x \in M : \mathscr{O}(p)(o(x)) = o'(p(x))\}$$

no es vacío. De acuerdo a la Proposición 4.2.10, este conjunto es un abierto de M y entonces, como M es conexa, coincide con M. Esto implica que si $x \in M$ es

$$\mathscr{O}(p)(o(x)) = o'(p(x)) = o'(p(g(x))) = \mathscr{O}(p)(o(g(x)))$$

y entonces, como $\mathscr{O}(p)$ es una biyección, $o(x) = o(g(x))$. Vemos así que g preserva las orientaciones de M. □ □

4.6.9. Corolario. (i) *La banda de Möbius y la botella de Klein son variedades no orientables.*

(ii) *Si $n \in \mathbb{N}$ entonces el espacio proyectivo $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ es orientable sii n es impar.*

Demostración. *(i)* La banda de Möbius M es el cociente del abierto $N = \mathbb{R} \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ por la acción del grupo cíclico infinito G generado por la función $\sigma : (x, y) \in N \mapsto (x+1, -y) \in N$. Usando las coordenadas usuales sobre $\mathbb{R}^2$, que se restringen a N, la forma $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ es una forma de volumen sobre N, y como $\sigma^*(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}x$ y $\sigma^*(\mathrm{d}y) = -\mathrm{d}y$, es $\sigma^*(\omega) = -\omega$. Esto nos dice que σ no preserva la orientación de N y entonces, como estamos en las condiciones de la proposición, podemos concluir que M no es orientable.

De manera enteramente similar, la botella de Klein es el cociente de $\mathbb{R}^2$ por la acción del grupo $G = \mathbb{Z}^2$ actuando vía

$$(a, b) \cdot (x, y) = (x + a, (-1)^a y + b), \qquad \forall (a, b) \in \mathbb{Z}^n,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si $g = (1, 0) \in \mathbb{Z}^2$ y $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ es la forma de volumen usual, es $g^*(\omega) = -\omega$, así que g invierte orientaciones y $K = \mathbb{R}^2/G$ no es orientable.

(ii) Sabemos que hay una acción del grupo cíclico $G = C_2$ de orden 2 sobre S^n tal que el elemento no trivial de G induce la función $\sigma : x \in S^n \mapsto -x \in S^n$ y el cociente correspondiente S^n/G es difeomorfo a $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Se sigue de la proposición que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ es orientable sii σ preserva las orientaciones de S^n.

Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que $f(x) = \|x\|^2$, de manera que 1 es un valor regular de f, $S^n = f^{-1}(1)$ y $X = \nabla f = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \partial_{x_i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$ es un campo transversal a S^n. Sea además

$$\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{n+1} \in \Omega^{n+1}(\mathbb{R}^n)$$

la forma de volumen usual y $j : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ la inclusión. Sabemos que $\nu = j^*(\iota_X \omega)$ es una forma de volumen sobre S^n.

El difeomorfismo σ es la restricción a S^n de la función $\hat{\sigma} : x \in \mathbb{R}^{n+1} \to -x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Claramente para cada $i \in \{1, \dots, n+1\}$ es $\hat{\sigma}^*(\mathrm{d}x_i) = -\mathrm{d}x_i$, así que $\hat{\sigma}^*(\omega) = (-1)^{n+1}\omega$. Como $\hat{\sigma}_*(X) = X$, es $\hat{\sigma}^* \circ \iota_X = \iota_X \circ \hat{\sigma}^*$. Finalemente, es $j \circ \sigma = \hat{\sigma} \circ j$, y usando todo esto vemos que

$$\begin{aligned}
\sigma^*(\nu) &= (\sigma^* \circ j^* \circ \iota_X)(\omega) = ((j \circ \sigma)^* \circ \iota_X)(\omega) = ((\hat{\sigma} \circ j)^* \circ \iota_X)(\omega) \\
&= (j^* \circ \hat{\sigma}^* \circ \iota_X)(\omega) = (j^* \circ \iota_{-X} \circ \hat{\sigma}^*)(\omega) = (-1)^{n+1} (j^* \circ \iota_{-X})(\omega) \\
&= (-1)^{n+1} (j^* \circ \iota_X)(\omega) = (-1)^{n+1}\nu.
\end{aligned}$$

Vemos así que σ preserva la orientación de S^n sii n es impar, lo que prueba el corolario. □

V. Subvariedades

§1. Inmersiones e incrustaciones

5.1.1. Sean M y N variedades y $f : M \to N$ una función diferenciable. Decimos que f es una ***inmersión*** si para cada $x \in M$ la aplicación diferencial $f_{*x} : T_xM \to T_{f(x)}N$ es inyectiva. Si además f es inyectiva e induce un homeomorfismo entre M y su imagen, decimos que f es una ***incrustación***.

5.1.2. Lema. *Sean M y N variedades, sea $f : M \to N$ una función diferenciable y sea $x \in M$. Si la diferencial $f_{*x} : T_xM \to T_{f(x)}N$ es inyectiva, entonces existe un entorno abierto U de x en M tal que $f|_U : U \to N$ es una inmersión.*

Demostración. **Hacer** □

{prop:inm-iny}

5.1.3. Proposición. *Sean M y N variedades y $f : M \to N$ una inmersión inyectiva. Si M es compacta, entonces f es una incrustación.*

§2. Subvariedades

5.2.1. Sean n, $k \in \mathbb{N}_0$ tales que $0 \leq k \leq n$. Si $c \in \mathbb{R}^{n-k}$, escribimos

$$\Sigma^n(c) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{k+i} = c_i \text{ si } 1 \leq i \leq n-k\}$$

Sea M una variedad de dimensión n. Una ***hoja de dimensión k*** de una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M es un subconjunto $S \subseteq U$ tal que existe $c \in \mathbb{R}^{n-k}$ tal que $\phi(S) = \phi(U) \cap \Sigma^n(c)$. Una ***subvariedad de M de dimensión k*** es un subconjunto $N \subseteq M$ tal que para cada $x \in N$ existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M alrededor de x tal que $U \cap N$ es una hoja de dimensión k de ϕ.

5.2.2. Una observación sencilla pero útil es que la propiedad de ser subvariedad es local:

{prop:sub:local}

Proposición. *Sea M una variedad y $N \subseteq M$ un conjunto. Si para cada $x \in N$ existe un abierto $U \subseteq M$ tal que $U \cap N$ es una subvariedad de dimensión k de U, entonces N es una subvariedad de dimensión k de M.*

Demostración. **Hacer** □

{prop:sub}

5.2.3. Proposición. *Sea M una variedad de dimensión n, sea $k \in \{0, \dots, n\}$ y sea $N \subseteq M$ una subvariedad de M de dimensión k. Entonces N es un cerrado de M y existe un estructura de variedad de dimensión k sobre N tal que la inclusión $\iota : N \hookrightarrow M$ es una incrustación.*

Más abajo probaremos que, de hecho, existe una única estructura de variedad sobre N con esa propiedad. De todas formas, y salvo que digamos lo contrario, toda vez que desde ahora consideremos una subvariedad como variedad lo haremos con respecto a la estructura de variedad construida en la siguiente prueba.

Demostración. Por hipótesis, para cada $x \in N$ existe una carta $\phi_x : U_x \to \mathbb{R}^n$ de M alrededor de x y un vector $c_x \in \mathbb{R}^{n-k}$ tal que $\phi_x(U_x \cap N) = \phi_x(U_x) \cap \Sigma^n(c_x)$. Como $\Sigma^n(c_x)$ es un cerrado de $\mathbb{R}^n$, $\phi_x(U_x) \cap \Sigma^n(c_x)$ es un cerrado de $\phi_x(U_x)$, y entonces $U_x \cap N$ es un cerrado de U_x. Como $\{U_x\}_{x \in N}$ es un cubrimiento abierto de N y ser cerrado es una propiedad local, concluimos que N es un cerrado de M.

Para cada $x \in N$ el conjunto $U_x \cap N$ es un abierto de N en su topología relativa. La carta ϕ_x se restringe a un homeomorfismo $U_x \cap N \to \phi_x(U_x \cap N) = \phi_x(U_x) \cap \Sigma^n(c_x)$, cuyo codominio es un abierto de $\Sigma^n(c_x)$. Componiendo con la restricción $p_x|_{\Sigma^n(c_x)}$ de la proyección $p_x : \Sigma^n(c_x) \to \mathbb{R}^k$ en las primeras k coordenadas, que es un homeomorfismo, obtenemos una función $\psi_x = p_x \circ \phi_x : U_x \cap N \to \mathbb{R}^l$ que es un homeomorfismo a su imagen. **Hacer** □

5.2.4. Si M es una variedad y $N \subseteq M$ es una subvariedad, la inclusión $\iota : N \to M$ es una inmersión, así que para cada $x \in N$ la diferencial $\iota_{*x} : T_xN \to T_xM$ es una inyección de espacios vectoriales. Desde ahora identificaremos a un vector de T_xN con su imagen por ι_{*x}. Esta indentificación es intrínseca:

Proposición. *Sean M una variedad y $N \subseteq N$ una subvariedad. Si $x \in N$ y $X \in T_xM$, entonces*

$$X \in T_xN \iff Xf = 0 \text{ para cada función } f \in C^\infty(M) \text{ tal que } f|_N = 0.$$

Demostración. **Hacer** □

5.2.5. La siguiente restricción nos permite deducir la diferenciabilidad de restricciones y correstricciones de funciones.

Proposición. *Sean M y N variedades y $f : M \to N$ una función diferenciable.*

(i) *Si $P \subseteq M$ es una subvariedad, entonces la restricción $f|_P : P \to N$ es diferenciable.*

(ii) *Si $\iota : P \to N$ es una inmersión y existe una función continua $\bar{f} : M \to P$ tal que $\iota \circ \bar{f} = f$, entonces $\bar{f}$ es una función diferenciable.*

Demostración. **Hacer** □

5.2.6. Usando la segunda parte de esta proposición podemos probar el resultado de unicidad prometido en 5.2.3.

Corolario. *Sea M una variedad y $N \subseteq M$ una subvariedad. Existe exactamente una estructura de variedad sobre N que hace que la inclusión $\iota : N \hookrightarrow M$ sea una incrustación.*

Demostración. **Hacer** □

5.2.7. Proposición. *Sean M y N variedades y sea $f : M \to N$ una función diferenciable.* {prop:rc}

(i) *Si f tiene rango constante k, entonces para cada $y \in N$ el conjunto $f^{-1}(y)$ es una subvariedad de N de codimensión k.* {prop:vr}

(ii) *Si $y \in N$ es tal que para cada $x \in f^{-1}(y)$ la diferencial $f_{*x} : T_xM \to T_{f(x)}N$ es sobreyectiva, entonces $f^{-1}(y)$ es una subvariedad de N de codimensión* dim N.

En la situación del segundo punto de esta proposición, decimos que y es un ***valor regular*** de f y que la subvariedad $f^{-1}(y)$ es una ***superficie de niver regular de f***.

Demostración. **Hacer** □

§3. Un resultado de inmersión

5.3.1. Proposición. *Toda variedad compacta es difeomorfa a una subvariedad de $\mathbb{R}^N$ para algún $N \geq 1$.*

Demostración. Sea M una variedad compacta de dimensión n. Para probar la proposición es suficiente que mostremos que hay una incrustación $M \to \mathbb{R}^N$ para algún $N \geq 1$.

Fijemos una función $\chi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $\chi|_{[0,1]} \equiv 1$, $0 < \chi_{[0,4]} \leq 1$ y $\chi|_{[4,\infty)} \equiv 0$. Si $x \in M$, existe una carta $\phi_x : U_x \to \mathbb{R}^n$ de M alrededor de x tal que $\phi_x(x) = 0$ y $\phi_x(U_x) = B_3(0)$, la bola abierta de radio 3 centrada en 0, y podemos considerar la función $f_x : M \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tal que para cada $y \in M$ es

$$f_x(y) = \begin{cases} \Big(\chi\big(\|\phi_x(y)\|^2\big)\,\phi_x(y),\ \chi\big(4\|\phi_x(y)\|^2\big)\Big) & \text{si } y \in U_x; \\ (0,0), & \text{si } y \in M \setminus \phi_x^{-1}(\bar{B}_2(0)). \end{cases}$$

Notemos que esto tiene sentido, porque si $y \in U_x \cap (M \setminus \phi_x^{-1}(\bar{B}_2(0)) = \phi_x^{-1}\big(B_3(0) \setminus \bar{B}_2(0)\big)$, entonces $\|\phi_x(y)\|^2 \geq 4$ y, en consecuencia, $\chi\big(\|\phi_x(y)\|^2\big) = \chi\big(4\|\phi_x(y)\|^2\big) = 0$. Es claro que f_x es una función diferenciable. Si ponemos $V_x = \phi_x^{-1}(B_1(0))$, que es un abierto de M que contiene a x y contenido en U_x, entonces $f|_{V_x}$ es una inmersión inyectiva:

- Sean que y, $y' \in V_x$ y supongamos que $f_x(y) = f_x(y')$. Como $\phi_x(y), \phi_x(y') \in B_1(0)$, es $\chi(\|\phi_x(y)\|^2) = \chi(\|\phi_x(y')\|^2) = 1$ y la hipótesis implica entonces que $\phi_x(y) = \phi_x(y')$. Como ϕ_x es inyectiva, vemos que $y = y'$.
- Por otro lado, por construcción es $f_x(y) = (\phi_x(y), \chi(4\|\phi_x(y)\|^2))$ para cada $y \in V_x$ y entonces $f_x|_{V_x}$ es una inmersión porque ϕ_x lo es.

Notemos que la imagen de f_x está contenida en $B_3(0) \times [0,1]$ y que si $y \in M$, entonces

$$f_x(y) \in B_3(0) \times (0,1] \iff y \in V_x. \tag{15}$$ {eq:sph}

El conjunto $\{V_x\}_{x \in M}$ es un cubrimiento abierto de M, que es compacta, así que existe un conjunto finito $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq M$ tal que $\mathscr{U} = \{V_{x_1}, \dots, V_{x_k}\}$ también es un cubrimiento de M. Consideremos la función $F : y \in M \longmapsto (f_{x_1}(y), \dots, f_{x_k}(y)) \in \mathbb{R}^{k(n+1)}$, que es claramente diferenciable. Se trata de una función inyectiva: supongamos, por el contrario, que y, $y' \in M$ son tales que $F(y) = F(y')$. Como $\mathscr{U}$ es un cubrimiento de M, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $y \in V_{x_i} = \phi_{x_i}^{-1}(B_1)$ y entonces la hipótesis implica que $f_{x_i}(y') = f_{x_i}(y) \in B_3(0) \times (0,1]$. En vista de (15), esto implica que $y' \in V_{x_i}$ y, como sabemos que $f_{x_i}|_{V_{x_i}}$ es inyectiva, podemos concluir que $y = y'$.

Más aún, F es una inmersión. En efecto, si $y \in M$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $y \in V_{x_i}$ y entonces $(f_{x_i})_{*y}$ es inyectiva, porque $f_{x_i}|_{V_{x_i}}$ es una inmersión, y de la definición de F es claro que $\operatorname{rank} F_{*y} \geq \operatorname{rank}(f_{x_i})_{*y} = \dim M$. De acuerdo a 5.1.3, entonces, la función $F : M \to \mathbb{R}^{k(n+1)}$ es una incrustación, porque M es compacta. □

5.3.2. La proposición que acabamos de probar es un resultado débil por dos razones: por un lado, estamos suponiendo que M es una variedad compacta, lo que limita enormemente la complejidad de la geometría que ésta puede tener, y, por otro, no obtuvimos ninguna cota para la dimensión N del espacio euclídeo $\mathbb{R}^N$ en el que incrustamos a M. Un resultado general en esta dirección fue obtenido por Hassler Whitney en 1944 [Whi44a, Whi44b]: mostró que si M es una variedad de dimensión $n > 1$ entonces existe una inmersión $M \to \mathbb{R}^{2n-1}$ y que M es difeomorfa a una subvariedad de $\mathbb{R}^{2n}$. Antes de eso había probado en [Whi36] el resultado *mucho* más simple de que hay una inmersión en $\mathbb{R}^{2n}$ y un difeomorfismo a una subvariedad cerrada de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Si escribimos $e(n)$ al menor elemento de $\mathbb{N}$ tal que toda variedad de dimensión n se incrusta en $\mathbb{R}^{e(n)}$, estos resultados nos dicen que $e(n) \leq 2n$ para todo n. Es posible verificar que para todo $k \geq 1$ se tiene que $e(2^k) = 2^{+1}$ —porque el espacio proyectivo real $\mathbb{R}\mathsf{P}^{2^k}$ no es difeomorfo a ninguna subvariedad de $\mathbb{R}^n$ con $n < 2^{k+1}$— y es un teorema de A. Haefliger y M. Hirsch [HH63] y de C.T.C Wall [Wal65] que $e(n) < 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ que no es una potencia de 2, pero no se sabe exactamente calcular los valores de la función e. Una conjetura clásica afirma que toda variedad *compacta* de dimensión n se incrusta en $\mathbb{R}^{2n+1-\alpha(n)}$ con $\alpha(n)$ el número de digitos no nulos en la escritura binaria de n —es de notar que, de ser cierta, sería el resultado óptimo para variedades compactas, ya que siempre que $1 \leq k_1 < \cdots < k_r$ el producto $\mathbb{R}\mathsf{P}^{2^{k_1}} \times \cdots \times \mathbb{R}\mathsf{P}^{2^{k_r}}$, que es una variedad compacta de dimensión $n = 2^{k_1} + \cdots + 2^{k_r}$, no se incrusta en $\mathbb{R}^{2n+1-r}$. Una revisión de los resultados conocidos sobre el problema de inmersión y incrustación puede encontrarse en el trabajo reciente [Sko08] de A. Skopenkov.

§4. Ejemplos

Gráficos de funciones diferenciables

5.4.1. Si M y son N variedades de dimensión m y n, respectivamente, y $f : M \to N$ es una función diferenciable, entonces el ***gráfico de*** f, $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in M \times N : x \in M\}$, es una subvariedad de $M \times N$.

Sea $x \in M$. Como f es diferenciable, existen cartas $\phi_x : U_x \to \mathbb{R}^m$ y $\psi_x : V_x \to \mathbb{R}^n$ de M y N tales que $x \in U_x$ y $f(U_x) \subseteq V_x$. Consideremos la función

$$\rho_x : (y, z) \in U_x \times V_x \longmapsto \big(\phi_x(y), \psi_x(z) - \psi_x(f(y))\big) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n.$$

Es inmediato verificar que es diferenciable e inyectiva y que su imagen es el conjunto

$$W_x = \{(a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : a \in \phi_x(U_x), b + (\psi_x \circ f \circ \phi_x^{-1})(a) \in \psi_x(V_x)\},$$

que es un abierto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. La función inversa de ρ_x es

$$(a, b) \in W_x \longmapsto (\phi_x^{-1}(a), \psi_x^{-1}\big(b + (\psi_x \circ f \circ \phi_x^{-1})(a)\big) \in U_x \times V_x,$$

que también es diferenciable. Vemos así que $\rho_x : U_x \times V_x \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo con codominio en un abierto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, así que es una carta de $M \times N$. Como

$$\rho_x\big(\Gamma_f \cap (U_x \times V_x)\big) = W_x \cap (\mathbb{R}^m \times 0),$$

vemos que $\Gamma_f \cap (U_x \times V_x)$ es una hoja de ρ_x.

Como el conjunto $\{U_x \times V_x\}_{x \in N}$ es un cubrimiento abierto de Γ_f en $M \times N$, usando la Proposición 5.2.2 podemos concluir que Γ_f es una subvariedad de $M \times N$.

Esferas

5.4.2. Sea $f : x \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \|x\|^2 \in \mathbb{R}$. Se trata de una función diferenciable, y si $x \in \mathbb{R}^n$ la diferencial $D_x f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ está dada por $D_x f(y) = 2\langle x, y\rangle$ para cada $y \in \mathbb{R}^n$. En particular, vemos que si $x \neq 0$ la diferencial $D_x f$ tiene rango 1. La esfera $S^n = f^{-1}(1)$ es entonces una subvariedad, porque 1 es un valor regular de f. {p:esferas:2}

En particular, en tanto subvariedad de $\mathbb{R}^n$ la esfera S^n es, de esta forma, una variedad diferenciable. En 1.3.2 construimos otra estructura diferenciable sobre S^n exhibiendo un atlas $\mathscr{A}$. Para ver que estas dos estructuras de variedad coinciden basta mostrar que la inclusión $S^n \hookrightarrow R^n$ es una inmersión cuando dotamos a S^n del atlas $\mathscr{A}$ y, para esto (usando las notaciones introducidas en 1.3.2), que para cada $i \in I$ la composición

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi_i^{-1}} U_i \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

tiene diferencial inyectiva en todo su dominio. La función es

$$h_i : y \in \mathbb{R}^n \longmapsto \left(\frac{2y}{\|y\|^2+1}, i\,\frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1}\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

y para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ su derivada parcial j-ésima es

$$\frac{\partial h_i}{\partial y_j} = \left(\frac{(\|y\|^2+1)2e_j - 4y_j y}{(\|y\|^2+1)^2}, i\,\frac{4y_j}{(\|y\|^2+1)^2}\right).$$

Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ son tales que

$$0 = \sum_{i=1}^n a_j \frac{\partial h_i}{\partial y_j} = \left(\frac{2}{(\|y\|^2+1)}\sum_{j=1}^n a_j e_j - \frac{4}{(\|y\|^2+1)^2}\sum_{j=1}^n a_j y_j y, \; i\,\frac{4}{(\|y\|^2+1)^2}\sum_{j=1}^n a_j y_j\right),$$

se sigue inmediatamente que $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Esto implica que la función h_i es una inmersión, como queríamos.

5.4.3. **Hacer**: La proyección $S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ es una inmersión.

Variedades de Stiefel

5.4.4. **Hacer**

Inmersiones de Plücker

5.4.5. **Hacer**

VI. Integrales

6.0.6. El siguiente lema es una generalización directa de un resultado bien conocido del cálculo usual:

{lema:integral-producto}

Lema. *Sean M y N dos variedades compactas orientadas de dimensiones m y n, respectivamente, sean $p_1 : M \times N \to M$ y $p_2 : M \times N \to N$ las dos proyecciones canónicas y consideremos a $M \times N$ orientada con la orientación producto de las de M y N. Si $\omega_1 \in \Omega^m(M)$ y $\omega_2 \in \Omega^n(N)$ son dos formas de soporte compacto, entonces*

$$\int_{M\times N} p_1^*\omega_1 \wedge p_2^*\omega_2 = \int_M \omega_1 \cdot \int_N \omega_2.$$

Demostración. Notemos que la integral sobre $M \times N$ que aparece en el enunciado tiene sentido porque la forma $p_1^*\omega_1 \wedge p_2^*\omega_2$ tiene soporte compacto: en efecto, es inmediato verificar que su soporte está contenido en $\operatorname{sop}\omega_1 \times \operatorname{sop}\omega_2$, que es un compacto de $M \times N$.

Sean $\{f_i : i \in I\}$ y $\{g_j : j \in J\}$ particiones finitas de la unidad sobre M y N, respectivamente, tales que los soportes de sus miembros están contenidos en abiertos coordenados difeomorfos a $\mathbb{R}^m$ o a $\mathbb{R}^n$, y pongamos $\tilde f_i = f_i \circ p_1$ para cada $i \in I$ y $\tilde g_j = g_j \circ p_2$ para cada $j \in J$. Por un lado, como $\int_M \omega_1 = \sum_{i\in I}\int_M f_i\omega_1$ y $\int_N \omega_2 = \sum_{j\in J}\int_N g_j\omega_2$, tenemos que

$$\int_M \omega_1 \cdot \int_N \omega_2 = \sum_{(i,j)\in I\times J} \int_M f_i\omega_1 \cdot \int_N g_j\omega_2. \tag{16}$$ {eq:intp:1}

Por otro, es inmediato verificar que $\{\tilde f_i \tilde g_j : (i,j) \in I \times J\}$ es una partición finita de la unidad sobre $M \times N$, así que

$$\begin{aligned}\int_{M\times N} p_1^*\omega_1 \wedge p_2^*\omega_2 &= \sum_{(i,j)\in I\times J}\int_{M\times N} \tilde f_i \tilde g_j p_1^*\omega_1 \wedge p_2^*\omega_2 \\ &= \sum_{(i,j)\in I\times J}\int_{M\times N} p_1^*(f_i\omega_1) \wedge p_2^*(g_j\omega_2). \end{aligned}\tag{17}$$ {eq:intp:2}

Vemos entonces que para probar el lema, basta mostrar que los términos correspondientes de las sumas que aparecen en los últimos miembros de las igualdades (16) y (17) son iguales. Equivalentemente, el lema quedará probado en toda su generalidad si mostramos que es cierto en el caso particular en que las formas ω_1 y ω_2 tienen sus soportes contenidos en abiertos coordenados $U \subseteq M$ y $V \subseteq N$ difeomorfos a $\mathbb{R}^m$ y a $\mathbb{R}^n$, respectivamente.

En ese caso, es $\int_M \omega_1 = \int_U \omega_1|_U$ y $\int_N \omega_2 = \int_V \omega_2|_V$ y, como $\operatorname{sup}(p_1^*\omega_1 \wedge p_2^*\omega_2) \subseteq U \times V$ y

$$\left(p_1^*\omega_1 \wedge p_2^*\omega_2\right)\big|_{U\times V} = (p_1^*\omega_1)|_{U\times V} \wedge (p_2^*\omega_2)|_{U\times V} = (p_1|_{U\times V}^U)^*(\omega_1|_U) \wedge (p_2|_{U\times V}^V)^*(\omega_2|_V),$$

tenemos que

$$\int_{M\times N} p_1^*\omega_1 \wedge p_2^*\omega_2 = \int_{U\times V} \left(p_1^*\omega_1 \wedge p_2^*\omega_2\right)\big|_{U\times V} = \int_{U\times V} (p_1|_{U\times V}^U)^*(\omega_1|_U) \wedge (p_2|_{U\times V}^V)^*(\omega_2|_V).$$

La igualdad que queremos probar es entonces equivalente a

$$\int_{U\times V} (p_1|_{U\times V}^{U})^*(\omega_1|_U) \wedge (p_2|_{U\times V}^{V})^*(\omega_2|_V), = \int_U \omega_1|_U \cdot \int_V \omega_2|_V.$$

Esto nos dice que es suficiente probar el lema en el caso en que $M = U$ y $N = V$. Supongamos que esto es así, y sean $\phi : \mathbb{R}^m \to M$ y $\psi : \mathbb{R}^n \to N$ difeomorfismos compatibles con las orientaciones, y sean $q_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $q_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ las proyecciones. La invariancia bajo difeomorfismos de la integral nos dice que

$$\int_M \omega_1 = \int_{\mathbb{R}^m} \phi^*\omega_1, \qquad \int_N \omega_2 = \int_{\mathbb{R}^n} \psi^*\omega_2$$

y, como $\phi\times\psi : \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n \to M\times N$ también es un difeomorfismo compatible con las orientaciones y

$$(\phi\times\psi)^*(p_1^*\omega_1 \wedge p_2^*\omega_2) = (\phi\times\psi)^*(p_1^*\omega_1) \wedge (\phi\times\psi)^*(p_2^*\omega_2) = q_1^*(\phi^*\omega_1) \wedge q_2^*(\psi^*\omega_2),$$

que

$$\int_{M\times N} p_1^*\omega_1 \wedge p_2^*\omega_2 = \int_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n} (\phi\times\psi)^*(p_1^*\omega_1 \wedge p_2^*\omega_2). = \int_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n} q_1^*(\phi^*\omega_1) \wedge q_2^*(\psi^*\omega_2).$$

La igualdad que queremos probar es entonces equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n} q_1^*(\phi^*\omega_1) \wedge q_2^*(\psi^*\omega_2). = \int_{\mathbb{R}^m} \phi^*\omega_1 \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \psi^*\omega_2$$

y esto implica que basta probar el lema cuando $M = \mathbb{R}^m$ y $N = \mathbb{R}^n$.

Pongámonos finalmente en esa situación y denotemos $(x_1, \dots, x_m)$ e $(y_1, \dots, y_n)$ a las coordenadas de M y N y $(z_1, \dots, z_{m+n})$ a las de $M \times N$. Existen funciones $h_1 \in C^\infty(M)$ y $h_2 \in C^\infty(N)$ tales que $\omega_1 = h_1(x_1, \dots, x_m)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_m$ y $\omega_2 = h_2(y_1, \dots, y_n)\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n$, de manera que

$$\int_M \omega_1 \cdot \int_N \omega_2 = \int_{\mathbb{R}^n} h_1(x_1, \dots, x_m) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} h_2(y_1, \dots, y_n). \tag{18}$$ {eq:intp:3}

Por otro lado, es inmediato que

$$\begin{aligned} p_1^*\omega_1 &= h_1(z_1, \dots, z_m)\mathrm{d}z_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_m, \\ p_2^*\omega_2 &= h_2(z_{m+1}, \dots, z_{m+n})\mathrm{d}z_{m+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_{m+n}, \end{aligned}$$

con lo que

$$p_1^*\omega_1 \wedge p_2^*\omega_2 = h_1(z_1, \dots, z_m)h_2(z_{m+1}, \dots, z_{m+n})\mathrm{d}z_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_{m+n},$$

y, en consecuencia,

$$\int_{M\times N} p_1^*\omega_1 \wedge p_2^*\omega_2 = \int_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n} h_1(z_1, \dots, z_m)h_2(z_{m+1}, \dots, z_{m+n}). \tag{19}$$ {eq:intp:4}

Es ahora claro que vale la igualdad del enunciado, porque los segundos miembros de (18) y de (19) son iguales. $\square$

VII. Flujos

§1. Dos aplicaciones

Homogeneidad

7.1.1. Si M es una variedad, escribimos $\mathsf{Diff}(M)$ al conjunto de todos los difeomorfismos $M \to M$. Es inmediato verificar que se trata de un grupo con respecto a la composición de funciones, y que hay una acción a izquierda de $\mathsf{Diff}(M)$ sobre M dada por

$$(f, x) \in \mathsf{Diff}(M) \times M \longmapsto f(x) \in M.$$

Si $f \in \mathsf{Diff}(M)$, el ***soporte*** $\operatorname{sop} f$ ***de*** f es la clausura del conjunto $\{x \in M : f(x) \neq x\}$. Denotamos $\mathsf{Diff}_c(M)$ al subconjunto de $\mathsf{Diff}(M)$ de los elementos de soporte compacto; se trata de un subgrupo de $\mathsf{Diff}(M)$ y, por supuesto, restringiendo la acción de $\mathsf{Diff}(M)$ obtenemos una acción de $\mathsf{Diff}_c(M)$ sobre M.

7.1.2. Si un grupo G actua sobre un conjunto X decimos que la acción es ***transitiva*** si para todo par de elementos $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$.

{prop:trans}

Proposición. *Sea M una variedad. Si M es conexa, entonces la acción de $\mathsf{Diff}_c(M)$ sobre M es transitiva.*

Demostración. Escribamos $G = \mathsf{Diff}_c(M)$ y $n = \dim M$. Sabemos que M es unión disjunta de las órbitas de G en M. Si mostramos que éstas son abiertas, se seguirá que son cerradas —porque el complemento de cada una de ellas es unión de órbitas— y entonces, como M es conexa, podremos concluir que hay exactamente una sola: esto significa exactamente que la acción de G es transitiva. Para mostrar que las órbitas son abiertas es suficiente con probar que todo punto es interior a su órbita.

Sea entonces $p \in M$ y sea $O = \{f(p) : f \in \mathsf{Diff}_c(M)\}$ su órbita. Existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ alrededor de p tal que su dominio U tiene clausura compacta en M, $\phi(p) = 0$ y $\phi(U) = B_1$, la bola abierta unitaria de $\mathbb{R}^n$ centrada en 0.

Fijemos $r \in U$. Pongamos $\rho_1 = (2\|\phi(r)\| + 1)/3$ y $\rho_2 = (\|\phi(r)\| + 2)/3$, de manera que $\|r\| < \rho_1 < \rho_2 < 1$, y sea $\chi : B_1 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $\chi|_{B_{\rho_1}} \equiv 1$ y $\chi|_{B_1 \setminus \bar{B}_{\rho_2}} \equiv 0$. Supongamos que $\phi(r) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ y sea X el campo tangente tal que para cada $x \in M$ es

$$X_x = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in M \setminus \phi^{-1}(\bar{B}_{\rho_2}); \\ \chi(\phi(x)) \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_i^\phi|_x, & \text{si } x \in U. \end{cases}$$

Notemos que esto está bien definido porque $\chi(\phi(x)) = 0$ cualquiera sea $x \in U \setminus \phi^{-1}(\bar{B}_{\rho_2})$. El campo X es diferenciable: como los abiertos $M \setminus \phi^{-1}(\bar{B}_{\rho_2})$ y U cubren M, basta ver que las restricciones a ellos son diferenciables —para el primero esto es evidente y para el segundo inmediato de la tercera condición dada en la Proposición 3.3.2.

Como el soporte del campo X está contenido en U, es compacto, y entonces X es completo: el correspondiente flujo es entonces una función $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ y $\Phi(t, x) = x$ siempre que $t \in \mathbb{R}$ y

$x \in M \setminus U$. En particular, el difeomorfismo $g : x \in M \mapsto \Phi(1, x) \in M$, tiene soporte compacto contenido en U y, en particular, $g \in \mathrm{Diff}_c(M)$.

Sea $\tau = \rho_1/\|\phi(r)\|$ y consideremos la curva $\alpha : t \in (-\tau, \tau) \longmapsto \phi^{-1}(t\phi(r)) \in M$, que es claramente diferenciable. Si $t \in (-\tau, \tau)$ es

$$\alpha'(t) = (\phi^{-1})_{*t\phi(r)}(\phi(r)) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_i^{\phi}|_{\alpha(t)}$$

y, como $\chi(\phi(\alpha(t))) = 1$ porque $\phi(\alpha(t)) \in B_{\rho_1}$, tenemos que, de hecho, $\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}$: así, α es una curva integral para X. Como $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = r$, vemos que $g(p) = \Phi(1, p) = r$.

Concluimos de esta forma que g es un elemento de $\mathrm{Diff}_c(M)$ tal que $g(p) = r$ y, en consecuencia, que $r \in O$. Esto vale cualquiera sea $r \in U$, así que de hecho es $U \subseteq O$ y vemos, como queríamos, que o es un punto interior de O. $\square$

7.1.3. Recordemos que una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos es una ***identificación*** si es sobreyectiva y para cada subconjunto $U \subseteq Y$ se tiene que U es abierto en Y si y solamente si $f^{-1}(U)$ es un abierto de X.

{lema:conexion}

Lema. *Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una identificación. Si Y es conexo y para cada $y \in Y$ el subespacio $f^{-1}(y)$ de X es conexo, entonces X es conexo.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existen en X dos abiertos disjuntos A y B tales que $X = A \cup B$. Si $y \in Y$, entonces $A \cap f^{-1}(y)$ y $B \cap f^{-1}(y)$ son dos abiertos disjuntos de $f^{-1}(y)$ que lo cubren, así que uno de ellos es vacío. Esto nos dice que si ponemos $\tilde{A} = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq A\}$ y $\tilde{B} = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq B\}$, entonces $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$ es una partición de Y. Para terminar, entonces, bastará probar que $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ son abiertos en Y y por simetría, de hecho, es suficiente hacerlo para el primero. Ahora bien, como p es una identificación, el conjunto $\tilde{A}$ es abierto en Y sii $p^{-1}(\tilde{A}) = \bigcup_{y \in \tilde{A}} f^{-1}(y)$ es un abierto de X. Esto último es inmediato, ya que esta unión es precisamente A. $\square$

7.1.4. Sea M una variedad y fijemos $k \in \mathbb{N}$. Sea $M^k = M \times \cdots \times M$ el producto con k factores, y sea

$$S^k(M) = \{(x_1, \ldots, x_k) \in M^k : 1 \leq i < j \leq n \implies x_i \neq x_j\}.$$

Se trata de un subconjunto abierto de M^k, así que es, de manera canónica, una variedad de dimensión $k \dim M$.

{lema:skm:conexo}

Lema. *Si M es conexa y tiene dimensión $\dim M \geq 2$, entonces $S^k(M)$ también es conexa.*

Demostración. Procedemos por inducción en k. Cuando $k = 1$ es $S^1(M) = M$, así que no hay nada que probar en ese caso. Supongamos entonces que $k \geq 1$, supongamos que para cada variedad conexa N de dimensión al menos 2 resulta conexa la variedad $S^k(N)$, fijemos una variedad M con $\dim M \geq 2$ y probemos que $S^{k+1}(M)$ es conexa.

Escribamos $p : S^{k+1}(M) \to M$ a la restricción a $S^{k+1}(M)$ de la k-ésima proyección canónica $\pi_{k+1}(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in M^{k+1} \mapsto x_{k+1} \in M$. Se trata de una función sobreyectiva. Como π_k es abierta y $S^{k+1}(M)$ es un abierto de M^k, la función p es también abierta. Se trata, además, de una identificación: como es continua, para verificarlo hay que mostrar que si $U \subseteq M$ es un conjunto tal que $p^{-1}(U)$ es un abierto de $S^k(M)$, entonces U es abierto en M. Sea entonces $U \subseteq M$ y supongamos que el conjunto

$$p^{-1}(U) = \{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in S^{k+1}(M) : x_{k+1} \in U\}$$

es un abierto de $S^{k+1}(M)$. Sea $x \in U$. Como $\dim M \geq 2$, M es infinita, y existen $x_1^0, \dots, x_k^0 \in M$ tales que la $(k+1)$-upla $\xi = (x_1^0, \dots, x_k^0, x) \in M^{k+1}$ está en $S_{k+1}(M)$. Claramente $\xi \in p^{-1}(U)$ y, por la hipótesis y el hecho de que $S^{k+1}(M)$ es un abierto de M^{k+1}, existen abiertos $V_1, \dots, V_{k+1}$ de M tales que $\xi \in V_1 \times \cdots \times V_{k+1} \subseteq p^{-1}(U)$. Entonces $V_{k+1} = p(V_1 \times \cdots \times V_{k+1}) \subseteq p(p^{-1}(U)) = U$, y vemos que x es un punto interior de U. La arbitrariedad de x en U implica así que U es un abierto de M, como queríamos.

De acuerdo al Lema 7.1.3, como p es una identificación y M es conexo para ver que $S^{k+1}(M)$ es conexo, y con eso probar el lema, es suficiente mostrar que para todo $x \in M$ la fibra $p^{-1}(x)$ es un conexo de $S^{k+1}(M)$. Ahora bien, es

$$p^{-1}(x) = \{(x_1, \dots, x_k, x) \in M^k : 1 \leq i, j \leq k \implies x_i \neq x_j \neq x\}$$

así que es fácil verificar que la función

$$(x_1, \dots, x_k, x) \in p^{-1}(x) \longmapsto (x_1, \dots, x_k) \in S^k(M \setminus \{x\})$$

es un homeomorfismo. En particular, como $M \setminus \{x\}$ es una variedad conexa —porque M es conexa y tiene dimensión al menos 2—, la hipótesis inductiva implica que la variedad $S^k(M \setminus \{x\})$, y entonces el subespacio $p^{-1}(x)$, es conexa. □

7.1.5. Si G es un grupo que actúa sobre un conjunto X y $k \geq 1$, decimos que la acción es ***k-transitiva*** si para cada par de k-uplas $(x_1, \dots, x_k)$ e $(y_1, \dots, y_k)$ de puntos distintos de X, existe un elemento $g \in G$ tal que $g \cdot x_i = y_i$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. En particular, es claro que la acción es 1-transitiva si y solamente si es transitiva.

{prop:ktrans}

Proposición. *Si M es una variedad de dimensión al menos 2, entonces la acción del grupo* $\operatorname{Diff}_c(M)$ *sobre M es k-transitiva para todo $k \geq 1$.*

Demostración. Sea $k \geq 1$. La acción del grupo $G = \operatorname{Diff}_c(M)$ sobre M induce una acción sobre M^k tal que para cada $f \in G$ y cada $(x_1, \dots, x_k) \in M^k$ es

$$f \cdot (x_1, \dots, x_k) = (f(x_1), \dots, f(x_k)).$$

Es inmediato verificar que $S^k(M)$ es un subconjunto invariante bajo esta acción, así que tenemos por restricción una acción de G sobre $S^k(M)$, y que la acción de G sobre M es k-transitiva exactamente cuando la acción de G sobre $S^k(M)$ es transitiva. Para probar la proposición probaremos esto último. De acuerdo al Lema 7.1.4, $S^k(M)$ es un espacio conexo, así que bastará, como en la prueba de la proposición 7.1.2, que cada punto de $S^k(M)$ es interior a su G-órbita.

Sea entonces $\xi = (x_1, \dots, x_k) \in S^k(M)$ y sea O su G-órbita. Como $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, podemos encontrar, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, una carta $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ de M alrededor de x_i de manera tal que $\phi_i(U_i) = B_1(0)$, la bola abierta unitaria de $\mathbb{R}^n$, y $\phi_i(x_0) = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, y $U_i \cap U_j = \varnothing$ si $i, j \in \{1, \dots, n\}$ son distintos.

Pongamos $U = U_1 \times \cdots U_k$ y consideremos un elemento $\xi' = (x'_1, \dots, x'_k) \in U$. De acuerdo a *la prueba* de la Proposición 7.1.2, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe un difeomorfismo $f_i \in G$ con soporte contenido en U_i y tal que $f_i(x_i) = x'_i$. Si ponemos $f = f_1 \circ \cdots \circ f_k$, que otra vez es un elemento de G, es inmediato verificar que $f(x_i) = x'_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Vemos así que $\xi' \in O$ y, en definitiva, que $U \subseteq O$, y concluimos, como nos habíamos propuesto, que ξ es un punto interior a O. □

Descomposiciones à la Morse

7.1.6. Proposición. *Sea M una variedad Riemanniana. Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonce existe un único campo vectorial diferenciable $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ tal que para todo $x \in M$ y todo $v \in T_x M$ se tiene que*

$$\langle \nabla f_x, v \rangle = f_{*x}(v).$$

Demostración. Para cada $x \in M$, la función $f_{*x} : T_x M \to \mathbb{R}$ es lineal. Como la estructura Riemanniana de M hace de $T_x M$ un espacio con producto interno, el teorema de representación de F. Riesz implica que existe un único vector $\nabla f_x \in T_x M$ tal que $\langle \nabla f_x, v \rangle = f_{*x}(v)$ para todo $v \in T_x M$. Esto implica que existe un campo ∇f sobre M que satisface la propiedad deseada, y que es único. Queda solo probar que es diferenciable.

Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M. Existen funciones $X^1, \dots, X^n : U \to \mathbb{R}$ tales que $\nabla f_x = \sum_{i=1}^n X^i(x) \partial_i^\phi|_x$ para todo $x \in U$ y tenemos que probar que se trata de funciones diferenciables. Si $j \in \{1, \dots, n\}$, entonces para cada $x \in U$ por un lado es

$$\langle \nabla f_x, \partial_j^\phi|_x \rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^n X^i(x) \partial_i^\phi|_x, \partial_j^\phi|_x \Big\rangle = \sum_{i=1}^n X^i(x) g_{i,j}(x)$$

y, por otro, $f_{*x}(\partial_j^\phi|_x) = \partial_j^\phi|_x f$, de manera que

$$\sum_{i=1}^n X^i(x) g_{i,j}(x) = \partial_j^\phi|_x f, \qquad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Sea $k \in \{1, \dots, n\}$. Multiplicando la ecuación correspondiente cada j por $g^{j,k}(x)$, sumando todas las ecuanciones obtenidas, y recordando que $\sum_{j=1}^n g_{i,j}(x) g^{j,k}(x) = \delta_i^k(x)$, vemos que

$$X^k(x) = \sum_{j=1}^n g^{j,k}(x)\, \partial_j^\phi|_x f.$$

Como las funciones $g^{j,k}$ y las funciones $\partial_j^\phi f$ son diferenciables en U, esto implica que X^k es diferenciable, como queríamos probar. □

7.1.7. Proposición. *Sea M una variedad y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a < b$, y*

- *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que el intervalo* $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ *no contiene valores críticos de* f, *y*
- *el conjunto* $f^{-1}([a-\varepsilon, b+\varepsilon])$ *es un compacto de* M.

Entonces el conjunto $N = f^{-1}(a)$ *es una subvariedad de* M *y hay una incrustación*

$$F : (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \times N \to M$$

con imagen el abierto $f^{-1}\big((a-\varepsilon, b+\varepsilon)\big)$ *y tal que conmuta el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times N \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p"'] & M \arrow[d, "f"] \\
(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \arrow[r, hook] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

con $p : (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \times N \to (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ *la proyección en el primer factor.*

Demostración. **Hacer** $\square$

7.1.8. Hacer: Funciones de Morse

7.1.9. Proposición. *Si* M *una variedad compacta sobre la que existe una función de Morse* $f : M \to \mathbb{R}$ *que tiene exactamente dos puntos críticos, entonces* M *es homeomorfa a una esfera.*

Demostración. **Hacer** $\square$

VIII. Grupos de Lie

§1. Grupos y homomorfismos

8.1.1. Un ***grupo de Lie*** es una 3-upla (G, μ, ι) en la que G es una variedad y $\mu : G \times G \to G$ e $\iota : G \to G$ son funciones diferenciables tales que (G, μ, ι) es un grupo. Escribiremos generalmente G en lugar de (G, μ, ι) y diremos que G es un grupo de Lie, dejando el resto de la estructura implícita; de la misma forma, escribiremos gh en lugar de $\mu(g, h)$ y g^{-1} en lugar de $\iota(g)$ cuando esto sea conveniente. Denotaremos e a los elementos neutros de los grupos.

8.1.2. Si G es un grupo de Lie y $g \in G$, las funciones $L_g : h \in G \mapsto gh \in G$ y $R_g : h \in G \mapsto hg \in G$ son las ***traslación a izquierda y a derecha por*** g, respectivamente. Se trata de funciones diferenciables: por ejemplo, si $g \in G$ es claramente diferenciable la función $l_g : h \in G \mapsto (g, h) \in G \times G$, así que L_g es diferenciable porque concide con la composición

$$G \xrightarrow{l_g} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

Si $g, h \in G$ es $L_{gh} = L_g \circ L_h$ y $R_{gh} = R_h \circ R_g$; si $e \in G$ es el elemento neutro, es $L_e = \mathrm{id}_G$. Se sigue de esto que para todo $g \in G$ las funciones L_g y $L_{g^{-1}}$, por un lado, y R_g y $R_{g^{-1}}$, por otro, son mutuamente inversas y, entonces, que L_g y R_g son difeomorfismos.

8.1.3. **Hacer**: Un subgrupo de un grupo de Lie que es una subvariedad es un subgroup de Lie. ESTO VA EN OTRO LADO! {prop:subgrupo}

§2. Campos invariantes

8.2.1. Si G es un grupo de Lie y $X \in \mathfrak{X}(G)$ es un campo tangente, decimos que X es ***invariante a izquierda*** si para cada g, $h \in G$ es $(L_g)_{*h}(X_h) = X_{gh}$, que es ***invariante a derecha*** si para cada g, $h \in G$ es $(R_g)_{*h}(X_h) = X_{hg}$, y que es ***bi-invariante*** si es invariante a izquierda y a derecha simultáneamente.

8.2.2. Proposición. *Sea G un grupo de Lie.*

(i) *El conjunto $\mathfrak{g}$ de los campos invariantes a izquierda es un subespacio vectorial de $\mathfrak{X}(G)$.*
(ii) *Un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ es invariante a izquierda sii para todo $g \in G$ se tiene que $(L_g)_{*x}(X_e) = X_g$.*
(iii) *Si $e \in G$ es el elemento neutro, entonces la función $X \in \mathfrak{g} \mapsto X_e \in T_eG$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. *(i)* Si $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, para cada $g, h \in G$ se tiene que

$$(L_g)_{*h}(X_h + \lambda Y_h) = (L_g)_{*h}(X_h) + \lambda (L_g)_{*h}(Y_h) = X_{gh} + \lambda Y_{gh},$$

porque la diferencial $(L_g)_{*h}$ es lineal y los campos X e Y son invariantes a izquierda. Esto nos dice que el campo $X + \lambda Y$ es él mismo invariante a izquierda y muestra que $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{X}(G)$ es un subespacio vectorial.

(ii) La condición es claramente necesaria. Veamos la suficiencia. Sea $X \in \mathfrak{X}(G)$ un campo tal que para todo $g \in G$ es $(L_g)_{*e}(X_e) = X_g$. Si g, $h \in G$, entonces

$$\begin{aligned}(L_g)_{*h}(X_h) &= (L_g)_{*h}\big((L_h)_{*e}(X_e)\big) = \big((L_g)_{*h} \circ (L_h)_{*e}\big)(X_e) = (L_g \circ L_h)_{*e}(X_e) \\ &= (L_{gh})_{*e}(X_e) = X_{gh}.\end{aligned}$$

Vemos así que X es invariante a izquierda.

(iii) Sea $\phi : X \in \mathfrak{g} \mapsto X_e \in T_eG$ la función del enunciado. Sea $X \in \ker \phi$. Si $g \in G$ es entonces $X_g = (L_g)_{*e}(X_e) = 0$. Esto nos dice que, de hecho, $X = 0$, e implica que ϕ es inyectiva.

Sea, por otro lado, $v \in T_eG$ y para cada $g \in G$ pongamos $X_g = (L_g)_{*e}(v) \in T_gG$. Tenemos así un campo tangente sobre G y su valor en e es precisamente v. Para ver que ϕ es sobreyectiva, bastará mostrar que X es diferenciable: en efecto, satisface la condición de *(ii)* por construcción.

Sea $f \in C^\infty(G)$; de acuerdo a la Proposición 3.3.2 bastará mostrar que $Xf \in C^\infty(G)$ para probar que X es diferenciable. Existen $\varepsilon > 0$ y una curva diferenciable $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ tales que $\gamma(0) = 0$ y $\gamma'(0) = v$, y la función $\tilde{f} : (h, t) \in G \times (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto f(h\gamma(t)) \in \mathbb{R}$ es diferenciable, porque es la composición

$$G \times (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{\mathrm{id}_G \times \gamma} G \times G \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Hay un campo $Y \in \mathfrak{X}(G \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ tal que si $p_1 : G \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ y $p_2 : G \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to (-\varepsilon, \varepsilon)$ son las proyecciones, es $p_{1*(g,t)}(Y_{(g,t)}) = 0$ y $p_{*(g,t)}(Y_{(g,t)}) = \frac{\partial}{\partial t}\big|_t$ para todo $(g, t) \in G \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. En particular, a función $Y\tilde{f} : G \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Si $g \in G$ es

$$(Y\tilde{f})(g, 0) = Y_{(g,0)}\tilde{f} = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g\gamma(t))\big|_{t=0}$$

y, como la curva $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \in g\gamma(t) \in G$ es la composición $L_g \circ \gamma$, que en 0 tiene vector tangente $(L_g)_{*e}(v) = X_g$, esto nos dice que

$$(Y\tilde{f})(g, 0) = X_g f.$$

Así, la función Xf es la composición de $Y\tilde{f} : G \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ con la función diferenciable $g \in G \mapsto (g, 0) \in G \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Esto prueba que Xf es una función diferenciable. □

8.2.3. Corolario. *La variedad subyacente a un grupo de Lie es paralelizable y, en particular, orientable.*

Demostración. Sea G un grupo de Lie de dimensión n y sea $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de T_eG. La proposición implica que existen campos invariantes a izquierda $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$ tales que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ es $(X_i)_e = v_i$. Si $g \in G$ es $\{(X_1)_g, \dots, (X_n)_g\} = (L_g)_*(\mathscr{B})$, así que como L_g es un difeomorfismos, el conjunto $\{(X_1)_g, \dots, (X_n)_g\}$ es una base de T_gG. Esto significa que G es paralelizable y, en consecuencia, que es orientable, de acuerdo a la Proposición 4.6.1. □

Ajustar esto a la definición de paralelizabilidad…

8.2.4. Una vez que sabemos que hay «suficientes» campos tangentes invariantes a izquierda, es fácil establecer la existencia de otros objectos con la misma invariancia. La siguiente proposición da un ejemplo de esto. Si G es un grupo de Lie, una forma $\omega \in \Omega^k(G)$ es ***invariante a izquierda*** si para cada $g \in G$ es $(L_g)^*\omega = \omega$, y escribimos $\Omega^k(G)^G$ al subespacio de $\Omega^k(G)$ de las formas invariantes a izquierda.

Proposición. *Si G es un grupo de Lie, la función $\omega \in \Omega^k(G)^G \mapsto \omega_e \in (\Lambda^k(T_eG))^*$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. La función del enunciado es claramente lineal. Si $\omega \in \Omega^k(G)^G$ es tal que $\omega_e = 0$, entonces para cada $g \in G$ es $\omega_g = (L_{g^{-1}})^*_g \omega_e = 0$ porque ω es invariante a izquierda, y esto nos dice que la función es inyectiva. Resta mostrar que es sobreyectiva.

Sea $\tilde{\omega} \in (\Lambda^k(T_eG))^*$. Si $g \in G$, pongamos $\omega_g = (L_{g^{-1}})^*_g \tilde{\omega}$; esto define una k-forma ω posiblemente no diferenciable sobre G. Si $g, h \in G$ es

$$((L_g)^*\omega)_h = (L_g)^*_h \omega_{gh} = (L_g)^*_h (L_{(gh)^{-1}})^*_{gh} \tilde{\omega} = (L_{(gh)^{-1}} \circ L_g)^*_h \tilde{\omega} = (L_{h^{-1}})^*_h \tilde{\omega} = \omega_h,$$

así que $(L_g)^*\omega = \omega$. Para ver que $\omega \in \Omega^k(G)^G$ bastará entonces mostrar que ω es diferenciable. Sea $\{X_1, \dots, X_n\}$ una base del espacio $\mathfrak{g}$ de campos tangentes invariantes a izquierda.

□

§3. Ejemplos

El grupo aditivo y el grupo multiplicativo

8.3.1. Con respecto a la estructura usual de variedad de $\mathbb{R}$ las funciones

$$\mu_+ : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto x + y \in \mathbb{R} \qquad \iota_+ : x \in \mathbb{R} \mapsto -x \in \mathbb{R}$$

son diferenciables, así que $(\mathbb{R}, \mu_+, \iota_+)$ es un grupo de Lie de dimensión 1, el ***grupo aditivo***. Por otro lado, el abierto $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ de $\mathbb{R}$ es una variedad de forma canónica, y las funciones

$$\mu_\times : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto xy \in \mathbb{R} \qquad \iota_\times : x \in \mathbb{R} \mapsto x^{-1} \in \mathbb{R}$$

son diferenciables. El grupo de Lie $(\mathbb{R}^\times, \mu_\times, \iota_\times)$ es el ***grupo multiplicativo***.

El subconjunto abierto $\mathbb{R}^\times_{>0} = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}^\times$ es un subgrupo, así que es un subgrupo de Lie de $\mathbb{R}^\times$. La función $\exp : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t \in \mathbb{R}^\times_{>0}$ es un isomorfismo de grupos de Lie, con inversa $\log : t \in \mathbb{R}^\times_{>0} \mapsto \log t \in \mathbb{R}$.

Toros

8.3.2. **Hacer**

Los grupos clásicos

8.3.3. Sea $n \geq 1$ y pongamos

$$\mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}.$$

Como la función $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua, el conjunto $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ es un abierto del espacio vectorial $M_n(\mathbb{R})$ y en consecuencia es, de forma canónica, una variedad de dimensión $n^2 = \dim M_n(\mathbb{R})$.

La multiplicación matricial $(A,B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \mapsto AB \in M_n(\mathbb{R})$ es una función diferenciable que se restringe a una función

$$\mu : \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}),$$

que es entonces diferenciable porque $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ es un abierto de $M_n(\mathbb{R})$. Por otro lado, son diferenciables $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y la función $\mathsf{cof} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ tal que para cada $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matriz $\mathsf{cof}(A)$ es la matriz de cofactores de A, y det no se anula sobre $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$, así que

$$\iota : A \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) \longmapsto A^{-1} = \frac{\mathsf{cof}(A)^t}{\det A} \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$$

es también diferenciable. Como $(\mathsf{GL}(n,\mathbb{R}),\mu,\iota)$ es un grupo, vemos que es de hecho un grupo de Lie, al que llamamos el ***grupo general lineal de grado*** n ***sobre*** $\mathbb{R}$.

8.3.4. Sea $n \geq 1$. Sabemos que $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ esa una función diferenciable cuya restricción $\det : \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es un homomorfismo de grupos. Se sigue de esto que

$$\mathsf{SL}(n,\mathbb{R}) = \ker \det = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$$

es un subgrupo cerrado de $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$. Queremos mostrar que es, de hecho, un subgrupo de Lie, al que llamamos ***grupo especial lineal de grado*** n ***sobre*** $\mathbb{R}$. Sólo queda ver que se trata de una subvariedad de $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ y, para esto, según la Proposición 5.2.7*(ii)*, alcanza con probar que el rango de la diferencial $D_A \det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es 1 para cada $A \in \mathsf{SL}(n,\mathbb{R})$.

Sea entonces $A \in \mathsf{SL}(n,\mathbb{R})$. Para todo $B \in M_n(\mathbb{R})$ es

$$\begin{aligned} D_A \det(B) &= \lim_{h\to 0} \frac{\det(A+hB) - \det A}{h} = \lim_{h\to 0} \det A \cdot \frac{\det(I + hA^{-1}B) - 1}{h} \\ &= D_I \det(A^{-1}B). \end{aligned}$$

Si $\lambda_A : B \in M_n(\mathbb{R}) \to A^{-1}B \in M_n(\mathbb{R})$, esto nos dice que

$$D_A = D_i \circ \lambda_A.$$

Como λ_A es un isomorfismo lineal, esta igualdad implica que $\operatorname{rank} D_A \det = \operatorname{rank} D_I \det$. Para terminar, mostremos que $\operatorname{rank} D_I \det = 1$: es suficiente ver que $D_I \det(I) \neq 0$, y eso sigue de un cálculo directo:

$$D_I \det(I) = \lim_{h\to 0} \frac{\det(I+hI) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^n - 1}{h} = n \neq 0.$$

La codimensión de $\mathsf{SL}(n,\mathbb{R})$ en $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ es 1, así que

$$\dim \mathsf{SL}(n,\mathbb{R}) = n^2 - 1.$$

8.3.5. Sea otra vez $n \geq 1$ y consideremos el conjunto

$$\mathsf{O}(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t A = I\}.$$

Es fácil ver que está contenido en $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ y que es un subgrupo. Se trata, de hecho, de un subgrupo de Lie, el ***grupo ortogonal de grado*** n ***sobre*** $\mathbb{R}$. Para probar esto, de acuerdo a la Proposición 8.1.3, es suficiente con verificar que $\mathsf{O}(n,\mathbb{R})$ es una subvariedad de $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$.

Sea entonces $f : A \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) \mapsto A^tA \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$, que es una función diferenciable. Si $A \in \mathsf{O}(n,\mathbb{R})$, la diferencial $D_Af : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ es tal que para cada $B \in M_n(\mathbb{R})$ es

$$D_Af(B) = \lim_{h\to 0} \frac{(A+hB)^t(A+hB) - A^tA}{h} = \lim_{h\to 0}(A^tB + B^tA + hB^tB) = A^tB + B^tA,$$

así que

$$D_Af(B) = A^tB + B^tA = D_If(A^tB)$$

y, como la función $B \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto A^tB \in M_n(\mathbb{R})$ es un isomorfismo lineal, el rango de D_Af coincide con el de D_If. Esta última es la función $B \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto B + B^t \in M_n(\mathbb{R})$, cuya imagen es el espacio de las matrices simétricas de $M_n(\mathbb{R})$, que tiene dimensión $\operatorname{rank} D_If = n(n+1)/2$. Vemos así que f tiene rango constante $n(n+1)/2$. Se sigue de la Proposición 5.2.7*(i)* que $\mathsf{O}(n,\mathbb{R}) = f^{-1}(I)$ es una subvariedad de $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$, como queríamos, y que tiene dimensión

$$\dim \mathsf{O}(n,\mathbb{R}) = n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2.$$

8.3.6. **HACER**: El grupo simpléctico.

IX. Cohomología de de Rham

§1. Definiciones y propiedades básicas

9.1.1. Sea M una variedad. Para cada $k \geq 0$ sea $\Omega^k(M)$ el espacio vectorial de las k-formas sobre M y sea $\mathrm{d}^k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ la diferencial exterior. Ponemos además $\Omega^k(M) = 0$ y $\mathrm{d}^k = 0$ si $k < 0$. Como $\mathrm{d}^{k+1} \circ \mathrm{d}^k = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, tenemos un complejo $\Omega^\bullet(M)$,

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}^{k-1}} \Omega^k(M) \xrightarrow{\mathrm{d}^k} \Omega^{k+1}(M) \xrightarrow{\mathrm{d}^{k+1}} \cdots$$

La ***cohomología de de Rham*** de M es la cohomología $H^\bullet(M) = H(\Omega^\bullet(M))$ de este complejo, de manera que para cada $k \geq 0$ es

$$H^k(M) = \frac{\ker \mathrm{d}^k}{\operatorname{im} \mathrm{d}^{k-1}}.$$

Si $f : M \to N$ es un función diferenciable, entonces para cada $k \geq 0$ tenemos una función lineal $f^{*k} : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(N) \arrow[r, "\mathrm{d}^0"] \arrow[d, "f^{*0}"] & \Omega^1(N) \arrow[r, "\mathrm{d}^1"] \arrow[d, "f^{*1}"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}^{k-1}"] & \Omega^k(N) \arrow[r, "\mathrm{d}^k"] \arrow[d, "f^{*k}"] & \Omega^{k+1}(N) \arrow[r, "\mathrm{d}^{k+1}"] \arrow[d, "f^{*(k+1)}"] & \cdots \\
\Omega^0(M) \arrow[r, "\mathrm{d}^0"] & \Omega^1(M) \arrow[r, "\mathrm{d}^1"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}^{k-1}"] & \Omega^k(M) \arrow[r, "\mathrm{d}^k"] & \Omega^{k+1}(M) \arrow[r, "\mathrm{d}^{k+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

conmuta, de manera que $f^* : \Omega^\bullet(N) \to \Omega^\bullet(M)$ es un morfismo de complejos que induce un morfismo $H^\bullet(f) : H^\bullet(N) \to H^\bullet(M)$ en la cohomología. Cuando esto no se preste a confusión, escribiremos simplemente f^* en lugar de $H^\bullet(f)$.

9.1.2. El siguiente resultado, cuya prueba es muy sencilla, es de carácter fundamental en todo lo que sigue:

{prop:dR:functorialidad

Proposición. (Functorialidad) (i) *Si $\mathrm{id}_M : M \to M$ es la función identidad de una variedad M, entonces el morfismo inducido*

$$H^\bullet(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{H^\bullet(M)} : H^\bullet(M) \to H^\bullet(M)$$

es la identidad de $H^\bullet(M)$.

(ii) *Si $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son funciones diferenciables, entonces*

$$H^\bullet(g \circ f) = H^\bullet(f) \circ H^\bullet(g) : H^\bullet(P) \to H^\bullet(M).$$

Demostración. **Hacer** □

9.1.3. Una aplicación inmediata de esto es el siguiente corolario, que es una de las motivaciones para el estudio de la cohomología de de Rham: la cohomología de una variedad depende solamente de su clase de difeomorfismo.

{corolario:dR:difeo}

Corolario. *Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo, entonces el morfismo $H^\bullet(f) : H^\bullet(N) \to H^\bullet(M)$ es un isomorfismo.*

Demostración. **Hacer** □

9.1.4. Como $\Omega^{-1}(M) = 0$, el 0-ésimo espacio de cohomología $H^0(M)$ de una variedad M es simplemente el núcleo de la diferencial exterior $\mathrm{d} : \Omega^0(M) = C^\infty(M) \to \Omega^1(M)$.

{prop:dR:0}

Proposición. *Si M es una variedad conexa, entonces* $\dim H^0(M) = 1$ *y $H^0(M)$ está generado como subespacio de $\Omega^0(M)$ por cualquier función constante no nula. Más generalmente, si M es una variedad arbitraria, el espacio vectorial $H^0(M)$ es el subespacio de $C^\infty(M)$ de las funciones localmente constantes, y si C es conjunto de componentes conexas de M, hay un isomorfismo $H^0(M) \cong \mathbb{R}^C$.*

Demostración. Basta probar la seguda afirmación, así que fijemos una variedad M arbitraria. Como observamos arriba, $H^0(M)$ es el núcleo de $\mathrm{d} : C^\infty(M) \to \Omega^1(M)$, y sabemos que éste es precisamente el subespacio de $C^\infty(M)$ de las funciones localmente constantes.

Sea $C = \{M_i : i \in I\}$ el conjunto de las componentes conexas de M. Si $c = (c_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^C$, hay una función $\phi(c) : M \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(c)|_{M_i} \equiv c_i$ para todo $i \in I$, y $\phi(c)$ es diferenciable y localmente constante. Tenemos así una aplicación $\phi : \mathbb{R}^C \to H^0(M)$ que es claramente lineal y biyectiva, así que $H^0(M) \cong \mathbb{R}^C$ como afirma la proposición. □

§2. Invariancia homotópica

{prop:dR:H}

9.2.1. Proposición. *Sea M una variedad y, para cada $t \in \mathbb{R}$, sea $i_t : x \in M \mapsto (x, t) \in M \times \mathbb{R}$. Entonces los morfismos inducidos i_0^*, $i_1^* : H^\bullet(M \times \mathbb{R}) \to H^\bullet(M)$ son iguales*

Demostración. **Hacer** □

{prop:dR:invariancia}

9.2.2. Proposición. (Invariancia homotópica) *Si $f, g : M \to N$ son dos funciones diferenciables entre variedades tales que $f \simeq g$, entonces $f^* = g^* : H^\bullet(N) \to H^\bullet(M)$.*

Demostración. Sean $f, g : M \to N$ dos funciones homotópicas, de manera que existe una homotopía $H : \mathbb{R} \times M \to N$ con $H \circ i_0 = f$ y $H \circ i_1$, si $i_0, i_1 : M \to \mathbb{R} \times M$ son las funciones de la Proposición 9.2.1. Entonces $f^* = (H \circ i_0)^* = i_0^* \circ H^*$ y $g^* = (H \circ i_1)^* = i_1^* \circ H^*$, y como esa proposición nos dice que $i_0^* = i_1^*$, vemos que $f^* = g^*$. □

9.2.3. Una función diferenciable $f : M \to N$ es una ***equivalencia homotópica*** si existe una función diferenciable $g : N \to M$ tal que $f \circ g \simeq \mathrm{id}_N$ y $g \circ f \simeq \mathrm{id}_N$. Es claro que todo difeomorfismo es una equivalencia homotópica, así que el siguiente corolario de la Proposición 9.2.2 es una generalización del Corolario 9.1.3.

Corolario. *Si $f : M \to N$ es una equivalencia homotópica entre variedades, entonces el morfismo inducido $f^* : H^\bullet(N) \to H^\bullet(M)$ es un isomorfismo.*

Demostración. **Hacer** □

9.2.4. Una variedad M es ***contráctil*** si hay una función $\star \to M$ con dominio en una variedad $\star$ con un único punto que es una equivalencia homotópica.

{corolario:dR:contractil

Corolario. *Si M es una variedad contráctil, entonces*

$$\dim H^k(M) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. **Hacer** □

9.2.5. Un caso especial particularmente importante es el siguiente:

Corolario. (Lema de Poincaré) *Si $n \geq 0$ es*

$$\dim H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. La función $H : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto tx \in \mathbb{R}^n$ es claramente diferenciable y es $H(0, -)$ constante y $H(1, -) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, de manera que $\mathbb{R}^n$ es contráctil. El resultado se sigue entonces inmediatamente del Corolario 9.2.4. □

§3. La sucesión exacta de Mayer-Vietoris

9.3.1. Sea M una variedad y supongamos que U y V son dos abiertos de M tales que $U \cup V = M$. Escribamos $i_U : U \to M$, $i_V : V \to M$, $j_U : U \cap V \to U$ y $j_V : U \cap V \to V$ a las inclusiones. Estas inducen morfismos de complejos $i_U^* : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(U)$, $i_V^* : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(V)$, $j_U^* : \Omega^\bullet(U) \to \Omega^\bullet(U \cap V)$ y $j_V^* : \Omega^\bullet(V) \to \Omega^\bullet(U \cap V)$.

Lema. *Hay una sucesión exacta corta de complejos*

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet(M) \xrightarrow{\begin{pmatrix} i_U^* \\ i_V^* \end{pmatrix}} \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \xrightarrow{\begin{pmatrix} j_U^* & -j_V^* \end{pmatrix}} \Omega^\bullet(U \cap V) \longrightarrow 0$$

Demostración. **Hacer** □

9.3.2. Proposición. *Sea M una variedad y $\{U, V\}$ un cubrimiento abierto de M. Hay una sucesión exacta larga*

$$0 \longrightarrow H^0(M) \xrightarrow{i^0} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{\Delta^0} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\partial^0} H^1(M) \xrightarrow{i^1} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}(M) \xrightarrow{\partial^{k-1}} H^k(M) \xrightarrow{i^k} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{\Delta^k} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\partial^k} H^{k+1}(M) \xrightarrow{i^{k+1}} \cdots$$

con morfismos

$$i^k = \begin{pmatrix} i_U^* \\ i_V^* \end{pmatrix} : H^k(M) \to H^k(U) \oplus H^k(V)$$

y

$$\Delta^k = \begin{pmatrix} j_U^* & -j_V^* \end{pmatrix} : H^k(U) \oplus H^k(V) \to H^k(U \cap V).$$

Demostración. **Hacer** □

§4. Ejemplos

La circunferencia

9.4.1. Sea $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ la circunferencia de radio 1. Si ponemos $U = \{(x,y) \in S^1 : x \neq -1\}$ y $V = \{(x,y) \in S^1 : x \neq 1\}$, entonces $\{U, V\}$ es un cubrimiento abierto de S^1. Las funciones {p:dR:S1}

$$\begin{aligned}
&\phi_U : t \in (-\pi, \pi) \mapsto (\cos t, \sin t) \in U, \\
&\phi_V : t \in (0, 2\pi) \mapsto (\cos t, \sin t) \in V, \\
&\phi_{U\cap V} : t \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \mapsto (\cos t, \sin t) \in U \cap V
\end{aligned}$$

son difeomorfismos. El Lema de Poincaré nos dice, entonces, que

$$\begin{aligned}
&\dim H^0(U) = \dim H^0(V) = 1, \\
&\dim H^0(U \cap V) = 2,
\end{aligned}$$

y que, para cada $k \geq 0$,

$$H^k(U) = H^k(V) = H^k(U \cap V) = 0.$$

Como S^1, U, V y $U \cap V$ son variedades de dimensión 1, sus cohomologías de de Rham se anulan en grados superiores a 1, así que la parte no trivial de la sucesión de Mayer-Vietoris para el cubrimiento $\{U, V\}$ de S^1 es

$$0 \longrightarrow H^0(S^1) \longrightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V) \longrightarrow H^1(S^1) \longrightarrow 0$$

Como $\dim H^0(U) \oplus H^0(V) = \dim H^0(U \cap V) = 2$, la característica de Euler de esta sucesión es

$$\dim H^0(S^1) - 2 + 2 - \dim H^1(S^1) = 0.$$

La variedad S^1 es conexa, de manera que $\dim H^0(S^1) = 1$ y, entonces, esta ecuación determina la dimensión de $H^1(S^1)$. Esto prueba la primera parte de la siguiente proposición:

{p:S1:gen}

9.4.2. Proposición. *Es*

$$\dim H^k(S^1) = \begin{cases} 1, & \textit{si } k \in \{0, 1\}; \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

El espacio $H^0(S^1)$ es el de las funciones constantes sobre S^1. Por otro lado, si $\eta = -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ e $\iota : S^1 \to \mathbb{R}^2$ es la inclusión, la forma $\omega = \iota^*\eta \in \Omega^1(S^1)$ es cerrada y su clase de cohomologia $[\omega]$ en $H^1(S^1)$ es no nula, de manera que genera a este espacio vectorial.

Demostración. Nos queda probar las afirmaciones sobre los generadores de $H^0(S^1)$ y $H^1(S^1)$. De la Proposición 9.1.4 que $H^0(S^1)$ es el espacio de las funciones constantes sobre S^1, así que nos queda ocuparnos de $H^1(S^1)$. La forma ω del enunciado es cerrada simplemente porque $\mathrm{d}\omega \in \Omega^2(S^1) = 0$; para ver que su clase es no nula, tenemos que mostrar que no es exacta, y eso implicará que esa clase genera a $H^1(S^1)$ porque sabemos que este espacio tiene dimensión 1.

Sea $\gamma : t \in [0,1] \mapsto (\cos \pi t, \sin \pi t) \in S^1$. Si $t \in [0,1]$, es

$$(\iota \circ \gamma)_{*t}\big(\tfrac{\partial}{\partial t}\big|_t\big) = -\pi \sin \pi t \tfrac{\partial}{\partial x}|_{\gamma(t)} + \pi \cos \pi t \tfrac{\partial}{\partial y}|_{\gamma(t)},$$

así que

$$\begin{aligned}(\iota \circ \gamma)^{*t}(\eta)\big(\tfrac{\partial}{\partial t}\big|_t\big) &= \eta_{\gamma(t)}\big((\iota \circ \gamma)_{*t}(\tfrac{\partial}{\partial t})\big) \\ &= (-\sin \pi t \mathrm{d}x + \cos \pi t \mathrm{d}y)\big(-\pi \sin \pi t \tfrac{\partial}{\partial x}|_{\gamma(t)} + \pi \cos \pi t \tfrac{\partial}{\partial y}|_{\gamma(t)}\big) \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Esto nos dice que $\gamma^*(\omega) = (\iota \circ \gamma)^*(\eta) = \pi \mathrm{d}t$ y entonces $\int_\gamma \omega = \int_0^1 \gamma^*(\omega) = \pi$. Como esto no es cero, vemos que $\omega \in \Omega^1(S^1)$ no es exacta, como queriamos. □

El complemento de un conjunto finito en el plano

{prop:pts}

9.4.3. Proposición. *Si $S \subseteq \mathbb{R}^2$ es un conjunto finito de n elementos, entonces*

$$\dim H^d(\mathbb{R}^2 \setminus S) \cong \begin{cases} 1, & \text{si } d = 0; \\ n, & \text{si } d = 1; \\ 0, & \text{si } d \geq 2. \end{cases}$$

Demostración. Si $n = 0$, la afirmación de la proposición es exactamente lo que afirma el Lema de Poincaré.

Sea ahora $n = 1$, de manera que $S = \{p\}$ con $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, y sea $M = \mathbb{R}^2 \setminus S$. Como antes, sea $S^1 = \{(x,y) \in M : x^2 + y^2 = 1\}$ la circunferencia unidad, y consideremos las funciones $j : q \in S^1 \to p + q \in M$ y $r : q \in M \mapsto (q-p)/\|q-p\| \in S^1$. La función $H : \mathbb{R} \times M \to M$ tal que para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $(x,y) \in M$ es

$$H(t,q) = t^2 q + (1-t)^2 \left(p + \frac{q-p}{\|q-p\|}\right)$$

es una homotopía diferenciable de $H(1,-) = \mathrm{id}_M$ a la función $H(0,-) = j \circ r$. Como $r \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$, vemos que j y r son equivalencias homotópicas inversas y podemos concluir que el morfismo inducido $r^* : H^\bullet(S^1) \to H^\bullet(M)$ es un isomorfismo. Vemos que vale la afirmación de la proposición en este caso y, en particular, $\dim H^1(M) = 1$.

Supongamos finalmente que $n > 1$ y sean $p \in S$ y $S' = S \setminus \{p\}$, y consideremos los abiertos $U = \mathbb{R}^2 \setminus S'$ y $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ de $\mathbb{R}^2$. Como $U \cup V = \mathbb{R}^2$ y $U \cap V = \mathbb{R}^2 \setminus S$ y todos estas variedades tienen dimensión dos, la sucesión de Mayer-Vietoris correspondiente al cubrimiento $\{U, V\}$ de $\mathbb{R}^2$ es

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^2) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^2 \setminus S') \oplus H^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^2 \setminus S) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2 \setminus S') \oplus H^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2 \setminus S) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow H^2(\mathbb{R}^2 \setminus S') \oplus H^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) \longrightarrow H^2(\mathbb{R}^2 \setminus S) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Del Lema de Poincaré sabemos que $H^d(\mathbb{R}^2) = 0$ si $d > 0$, así que esta sucesión exacta se parte en una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^2) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^2 \setminus S') \oplus H^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^2 \setminus S) \longrightarrow 0 \tag{20}$$ {eq:pts:1}

y dos isomorfismos

$$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus S') \oplus H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) \xrightarrow{\cong} H^1(\mathbb{R}^2 \setminus S) \tag{21}$$ {eq:pts:2}

y

$$H^2(\mathbb{R}^2 \setminus S') \oplus H^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) \xrightarrow{\cong} H^2(\mathbb{R}^2 \setminus S) \tag{22}$$ {eq:pts:3}

Inductivamente, la proposición nos dice que

$$\dim H^d(\mathbb{R}^2 \setminus S') \cong \begin{cases} 1, & \text{si } d = 0; \\ n-1, & \text{si } d = 1; \\ 0, & \text{si } d \geq 2; \end{cases} \qquad \dim H^d(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) \cong \begin{cases} 1, & \text{si } d = 0; \\ 1, & \text{si } d = 1; \\ 0, & \text{si } d \geq 2. \end{cases}$$

De la sucesión exacta (20), entonces, vemos que

$$\dim H^0(\mathbb{R}^2 \setminus S) = \dim H^0(\mathbb{R}^2 \setminus S') \oplus H^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) - \dim H^0(\mathbb{R}^2) = 2 - 1 = 1,$$

de (21), que

$$\dim H^1(\mathbb{R}^2 \setminus S) = \dim H^1(\mathbb{R}^2 \setminus S') \oplus H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) = (n-1) + 1 = n$$

y de (22) que $\dim H^2(\mathbb{R}^2 \setminus S) = 0$. □

9.4.4. Podemos completar el resultado de la proposición anterior exhibiendo una base para el espacio $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus S)$:

Proposición. *Sea $S = \{p_1 = (x_1, y_1), \dots, p_n = (x_n, y_n)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es un conjunto de n elementos y para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ sea*

$$\omega_i = \frac{-(y - y_i)\mathrm{d}x + (x - x_i)\mathrm{d}y}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus S).$$

Estas formas son cerradas y el conjunto de sus clases $\{[\omega_i] : 1 \leq i \leq n\}$ es una base de $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus S)$.

Demostración. Si $n = 0$ no hay nada que probar,

Supongamos que $n = 1$. La 1-forma $\omega_1 \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus S)$ es cerrada y su integral a lo largo de la curva cerrada $\gamma : t \in [0,1] \mapsto p + (\cos \pi t, \sin \pi t) \in M$ es $\int_\gamma \omega = \pi \neq 0$, de manera que ω no es exacta. Así, su clase $[\omega]$ en $H^1(S^1)$ es no nula y, como este espacio tiene dimensión 1, el conjunto $\{[\omega_1]\}$ es una base.

Supongamos ahora que $n > 1$ y procedamos inductivammente; sea $S' = S \setminus \{p_n\}$. El conjunto $\{[\omega_i] : 1 \leq i < n\}$ es una base de $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus S')$ y $\{[\omega_n]\}$ es una base de $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_n\})$. En la prueba de la Proposición 9.4.3 mostramos que la función $j : H^1(\mathbb{R}^2 \setminus S') \oplus H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_n\}) \to H^1(\mathbb{R}^2 \setminus S)$, que allí apareció en la ecuación (21), es un isomorfismo. La restricción de esta función a cada uno de los dos sumados de su dominio está inducida por la restricción a $\mathbb{R}^2 \setminus S$ de 1-formas sobre $\mathbb{R}^2 \setminus S'$ y $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_n\}$, respectivamente, y entonces podemos concluir inmediatamente que $\{[\omega_i] : 1 \leq i \leq\}$ es una base de $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus S)$. □

Esferas

9.4.5. Proposición. *Si $n \geq 1$, entonces*

$$\dim H^k(S^n) = \begin{cases} 1, \text{si } k \in \{0, n\}; \\ 0, \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. **Hacer** □

Toros

9.4.6. Proposición. *Sea $n \geq 1$, sea $T^n = (S^1)^n$ el n-toro y sea $k \in \{0, \dots, n\}$. Sea $\omega \in \Omega^1(S^1)$ una 1-forma cuya clase $[\omega]$ genera $H^1(S^1)$, sean $p_1, \dots, p_n : T \to S^1$ las proyecciones canónicas y para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ pongamos $\zeta_i = p_i^* \omega \in \Omega^1(T^n)$. Si $k \in \{0, \dots, n\}$, sea $\mathscr{I}_k$ la familia de todos los subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal k y si $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathscr{I}_k$ con $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, sea $\zeta_I = \zeta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \zeta_{i_k} \in \Omega^k(T^n)$. Entonces para cada $I \in \mathscr{I}_k$ la forma ζ_k es cerrada, de manera que represeta una clase $[\zeta_I] \in H^k(T^n)$, y el conjunto $\{[\zeta_I] : I \in \mathscr{I}\}$ es una base de $H^k(T^n)$. En particular,* {prop:dR:toros}

$$\dim H^k(T^n) = \binom{n}{k}.$$

Demostración. Escribamos $\mathbf{n} = \{1, \dots, n\}$. Si $i \in \mathbf{n}$, sea $\zeta_i = p_i^* \omega$, como en el enunciado; como $\mathrm{d}\zeta_i = \mathrm{d}p_i^* \omega = p_i^* \mathrm{d}\omega = 0$ porque $\Omega^2(S^1) = 0$, las formas $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ son cerradas. Para cada $k \in \{0, \dots, n\}$ y cada $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathscr{I}_k$ con $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, sea $\zeta_I = \zeta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \zeta_{i_k}$, que, como d es una derivación, así que ζ_I también es cerrada.

Fijemos una orientación cualquiera sobre S^1 y pongamos sobre T^n la orientación producto. Supongamos que existe $\eta \in \Omega^{n-1}(T^n)$ tal que $\mathrm{d}\eta = \zeta_{\mathbf{n}}$. Como T^n tiene borde vacío, el teorema de Stokes nos dice que

$$\int_{T^n} \zeta_{\mathbf{n}} = \int_{T^n} \mathrm{d}\eta = \int_{\partial T^n} \eta = 0. \tag{23}$$ {eq:dR:T1}

Por otro lado, de acuerdo al Lema 6.0.6, es

$$\int_{T^n} \zeta_{\mathbf{n}} = \int_{T^n} p_1^* \omega \wedge \cdots \wedge p_n^* \omega = \left(\int_{S^1} \omega \right)^n$$

porque $\int_{S^1} \omega \neq 0$. Como esto contradice a (23), vemos que $\zeta_{\mathbf{n}}$ no es exacta.

Fijemos ahora $k \in \{0, \dots, n\}$, sea $a : \mathscr{I}_k \to \mathbb{R}$ una función cualquiera, consideremos la forma $\xi = \sum_{I \in \mathscr{I}_k} a(I) \zeta_I \in \Omega^k(T^n)$ y supongamos que existe una forma $\eta \in \Omega^{k-1}(T^n)$ tal que $\mathrm{d}\eta = \xi$. Sea $J \in \mathscr{I}_k$. Es inmediato verificar que $\zeta_I \wedge \zeta_{\mathbf{n} \setminus J} = 0$ si $I \in \mathscr{I}_k$ es distinto de J y que existe $\varepsilon_J \in \{\pm 1\}$ tal que $\zeta_I \wedge \zeta_{\mathbf{n} \setminus J} = \varepsilon \zeta_{\mathbf{n}}$. Esto implica que

$$\mathrm{d}(\eta \wedge \zeta_{\mathbf{n} \setminus J}) = \xi \wedge \zeta_{\mathbf{n} \setminus J} = \varepsilon_J a(J) \zeta_{\mathbf{n}}$$

y, como ya vimos, esto es posible solamente si $a(J) = 0$. Esto prueba que el conjunto de clases de cohomología $\mathscr{B}_k = \{[\zeta_I] : I \in \mathscr{I}_k\}$ es linealmente independiente en $H^k(T^n)$.

Mostremos que $\mathscr{B}_k$ es, de hecho, una base de $H^k(T^n)$, pata lo cual bastará probar que $\dim H^k(T^n) = \binom{n}{k}$. Notemos que en el caso en que $n = 1$ no hay nada que probar; para el caso general procedemos por inducción.

Sean $\bar{U} = \{(x,y) \in S^1 : x \neq -1\}$ y $\bar{V} = \{(x,y) \in S^1 : x \neq 1\}$, y pongamos $U = p_n^{-1}(\bar{U})$ y $V = p_n^{-1}(\bar{V})$. Sean además $\bar{W}_+ = \{(x,y) \in S^1 : x > 0\}$, $\bar{W}_+ = \{(x,y) \in S^1 : x < 0\}$, y $W_\pm = p_n^{-1}(W_\pm)$; es $U \cap V = W_+ \cup W_-$, y la unión es disjunta. Sea $h : \mathbb{R} \times T^{n-1} \to T^n$ tal que

$$h(t, (z_1, \dots, z_{n-1}) = (z_1, \dots, z_{n-1}, (\cos \pi t, \sin \pi t))$$

para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $(z_1, \dots, z_{n-1}) \in T^{n-1}$.

Como la imagen de $h(0,-)$ está contenida en U, podemos correstringirla a una función $h(0,-)|^U : T^{n-1} \to U$, y ésta y $q|_U : U \to T^{n-1}$ son equivalencias homotópicas inversas. En efecto, es $q|_U \circ h(0,-)|^U = \mathrm{id}_{T^{n-1}}$ y la función $H : \mathbb{R} \times U \to U$ tal que para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $(z_1, \dots, z_n) \in U$ es

$$H(t, (z_1, \dots, z_n))) = \left(z_1, \dots, z_{n-1}, \frac{(1-t)^2 z_n + t^2(1,0)}{\|(1-t)^2 z_n + t^2(1,0)\|} \right)$$

es una homotopía tal que $H(0,-) = \mathrm{id}_U$ y $H(1,-) = h(0,-)|^U \circ q|_U$. De forma similar podemos mostrar que las restricciones $q|_V : V \to T^{n-1}$, $q|_{W_+} : W_+ \to T^{n-1}$ y $q|_{W_-} : W_- \to T^{n-1}$ son equivalencas homotópicas.

Cada vez que tenemos un par de abiertos A y B con $A \subseteq B$, escribamos $r_A^B : A \to B$ a la inclusión. Como $U \cap V = W_+ \cup W_-$ y la unión es disjunta, hay un isomorfismo

$$\begin{pmatrix} r_{W_+}^{U\cap V} \\ r_{W_-}^{U\cap V} \end{pmatrix} : H^\bullet(V \cap V) \cong H^\bullet(W_+) \oplus H^\bullet(W_-)$$

En la sucesión exacta de Mayer-Vietoris para el cubrimiento abierto $\{U, V\}$ de T^n aparece el morfismo

$$\Delta = \begin{pmatrix} (r_{U\cap V}^U)^* & -(r_{U\cap V}^V)^* \end{pmatrix} : H^\bullet(U) \oplus H^\bullet(V) \to H^\bullet(U \cap V)$$

y la composición

$$\begin{tikzcd} H^\bullet(T^{n-1}) \oplus H^\bullet(T^{n-1}) \arrow[r, "\begin{pmatrix} q|_U^* & 0 \\ 0 & q|_V^* \end{pmatrix}"] & H^\bullet(U) \oplus H^\bullet(V) \arrow[d, "\Delta"] & \\ & H^\bullet(U \cap V) \arrow[r, "\begin{pmatrix} (r_{W_+}^{U\cap V})^* \\ (r_{W_-}^{U\cap V})^* \end{pmatrix}"'] & H^\bullet(W_+) \oplus H^\bullet(W_-) \end{tikzcd} \tag{24}$$

{eq:dR:Ty}

es

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} (r_{W_+}^{U\cap W})^* \circ (r_{U\cap V}^U)^* \circ q|_U^* & -(r_{W_+}^{U\cap W})^* \circ (r_{U\cap V}^V)^* \circ q|_V^* \\ (r_{W_-}^{U\cap W})^* \circ (r_{U\cap V}^U)^* \circ q|_U^* & -(r_{W_-}^{U\cap W})^* \circ (r_{U\cap V}^V)^* \circ q|_V^* \end{pmatrix} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} (q|_U \circ r_{W_+}^U)^* & -q|_V \circ r_{W_+}^V)^* \\ (q|_U \circ r_{W_-}^U)^* & -q|_V \circ r_{W_-}^V)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q|_{W_+}^* & -q|_{W_+}^* \\ q|_{W_-}^* & -q|_{W_-}^* \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{25}$$

{eq:dT:Tz}

porque conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} W_\varepsilon \arrow[r, "r_\varepsilon^U"] \arrow[d, "r_\varepsilon^V"'] \arrow[dr, "q|_{W_\varepsilon}"] & U \arrow[d, "q|_U"] \\ V \arrow[r, "q|_V"'] & T^{n-1} \end{tikzcd}$$

Como $q|_{W_+}^*$ y $q|_{W_-}^*$ son isomorfismos, es fácil ver a partir de (25) que el núcleo y el conúcleo de la composición (24) es isomorfo a $H^\bullet(T^{n-1})$ y, entonces, que lo mismo es cierto del núcleo y el conúcleo de Δ. En la sucesión exacta

$$H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) \xrightarrow{\Delta^{k-1}} H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^k(T^n) \xrightarrow{\rho} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{\Delta^k} H^k(U \cap V)$$

tenemos entonces que

$$\dim \ker \partial = \dim \operatorname{im} \Delta^{k-1} = \dim H^{k-1}(T^{n-1}) = \binom{n-1}{k}$$

y

$$\dim \operatorname{im} \rho = \dim \ker \Delta^k = \dim H^k(T^{n-1}) = \binom{n-1}{k},$$

así que la exactitud en $H^k(T^n)$ implica que

$$\dim H^k(T^n) = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Esto completa la prueba. □

Espacios proyectivos complejos

9.4.7. Para cada $n \geq 0$ ecribimos $\mathbb{C}\mathsf{P}^n$ al espacio proyectivo complejo de dimensión n, que es una variedad de dimensión $2n$.

Fijemos $n \geq 1$. Sea $Q = (0 : \cdots : 0 : 1) \in \mathbb{C}\mathsf{P}^n$, consideremos la función

$$\iota : (z_0 : \cdots : z_{n-1}) \in \mathbb{C}\mathsf{P}^{n-1} \mapsto (z_0 : \cdots : z_{n-1} : 0) \in \mathbb{C}\mathsf{P}^n,$$

llamemos $H = \iota(\mathbb{C}\mathsf{P}^{n-1})$ a su imagen y sean, finalmente, $U = \mathbb{C}\mathsf{P}^n \setminus \{Q\}$ y $V = \mathbb{C}\mathsf{P}^n \setminus H$, que son dos abiertos de $\mathbb{C}\mathsf{P}^n$ que lo cubren.

Sea $r : (z_0 : \cdots : z_n) \in U \mapsto (z_0 : \cdots : z_{n-1}) \in \mathbb{C}\mathsf{P}^{n-1}$. Es fácil ver que esto está bien definido, que $r \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathbb{C}\mathsf{P}^{n-1}}$ y que la función

$$H : (t, (z_0 : \cdots : z_n)) \in \mathbb{R} \times U \longmapsto (z_0 : \cdots : z_{n-1} : tz_n) \in U$$

es una homotopía diferenciable con $H(1, -) = \mathrm{id}_U$ y $H(0, -) = \iota \circ r$. Así, r e ι son equivalencias homotópicas inversas y es un isomorfismo la función

$$\iota^* : H^\bullet(U) \xrightarrow{\cong} H^\bullet(\mathbb{C}\mathsf{P}^{n-1}). \tag{26}$$ {eq:dR:cp:1}

Por otro lado, como la función $\phi : (z_0, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \longmapsto (z_0 : \cdots : z_{n-1} : 1) \in V$ es un difeomorfismo con $\phi(\mathbb{C}^n \setminus 0) = U \cap V$, tenemos que

$$\dim H^k(V) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{27}$$ {eq:dR:cp:2}

Más aún, restricción $\phi|_{\mathbb{C}^n \setminus 0} : \mathbb{C}^n \setminus 0 \to U \cap V$ también es un difeomorfismo. De esto se sigue fácilmente que $U \cap V$ tiene el tipo homotópico de una esfera S^{2n-1} y, en particular, que

$$\dim H^k(U \cap V) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \in \{0, 2n-1\}; \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Usando esto, (26) y (27), vemos que la sucesión de Mayer-Vietoris para el cubrimiento abierto $\{U, V\}$ de $\mathbb{C}\mathsf{P}^n$ se parte entonces una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{C}\mathsf{P}^n) \longrightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V) \longrightarrow H^1(\mathbb{C}\mathsf{P}^n) \longrightarrow H^1(U) \longrightarrow 0 \tag{28}$$ {eq:dR:cp:3}

en isomorfismos $H^k(\mathbb{C}\mathsf{P}^n) \to H^k(U)$, para $2 \leq k \leq 2n-2$, y en una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^{2n-1}(\mathbb{C}\mathsf{P}^n) \longrightarrow H^{2n-1}(U) \longrightarrow H^{2n-1}(U \cap V) \longrightarrow H^{2n}(\mathbb{C}\mathsf{P}^n) \longrightarrow H^{2n}(U) \longrightarrow 0$$

Como $U \simeq \mathbb{C}\mathsf{P}^{n-1}$ y $\mathbb{C}\mathsf{P}^{n-1}$ tiene dimensión $2n-2$, vemos que $H^{2n-1}(U) = H^{2n}(U) = 0$, y la última sucesión exacta nos dice que $H^{2n-1}(\mathbb{C}\mathsf{P}^n) = 0$ y que la función $H^{2n-1}(U \cap V) \to H^{2n}(\mathbb{C}\mathsf{P}^n)$ es un isomofismo. Por otro lado, como U, V y $U \cap V$ son todos espacios conexos, el morfismo $H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap)$ es sobreyectivo, y de la exactitud de (28) vemos que el morfismo $H^1(\mathbb{C}\mathsf{P}^n) \to H^1(U)$ también es un isomorfismo. En definitiva, hemos probado que la inclusión $j : U \to \mathbb{C}\mathsf{P}^n$ induce isomorfismos

$$j^* : H^k(\mathbb{C}\mathsf{P}^n) \to H^k(U), \qquad 0 \leq k \leq 2n-1$$

y que es un isomorfismo el morfismo de conexión

$$\partial : H^{2n-1}(U \cap V) \to H^{2n}(\mathbb{C}\mathsf{P}^n). \tag{29}$$ {eq:dR:cp:4}

{prop:dR:CP}

9.4.8. Proposición. *Si $n \geq 0$, es*

$$\dim H^k(\mathbb{C}\mathsf{P}^n) = \begin{cases} 1, & \textit{si } k \textit{ es par y } 0 \leq k \leq 2n; \\ 0, & \textit{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $n \geq 1$. Sea, como arriba, $\iota : \mathbb{C}\mathsf{P}^{n-1} \to \mathbb{C}\mathsf{P}^n$ la inclusión e $\iota|^U : \mathbb{C}\mathsf{P}^{n-1} \to U$ su correstricción a U. Sabemos que ι^U es una equivalencia homotópica, y que $j : U \to \mathbb{C}\mathsf{P}^n$ induce un isomorfismo en $j^* : H^k(\mathbb{C}\mathsf{P}^n) \to H^k(U)$ si $0 \leq k \leq 2n-1$. Como $j \circ \iota^U = \iota$, esto nos dice que

$$\iota^* : H^k(\mathbb{C}\mathsf{P}^n) \to H^k(\mathbb{C}\mathsf{P}^{n-1}) \text{ es un isomorfismo si } 0 \leq k \leq 2n-1. \tag{30}$$ {eq:dR:cp:5}

Por otro lado, del isomorfismo (29) y el hecho de que $U \cap V$ tiene el tipo homotópico de S^{2n-1}, sabemos que

$$H^{2n}(\mathbb{C}\mathsf{P}^n) \cong \mathbb{R}. \tag{31}$$ {eq:dR:cp:6}

Es muy facil probar ahora la proposición inductivamente usando (30) y (31), y partiendo de la observación de que $\mathbb{C}\mathsf{P}^0$ es un espacio de un solo punto. □

{lema:grupos-abeliano

9.4.9. Lema. *Si G es un grupo de Lie abeliano, conexo y compacto de dimensión n, entonces G es difeomorfo al toro T^n.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g}$ el algebra de Lie de G y sea $\exp : \mathfrak{g} \to G$ la aplicación exponencial. Como G es abeliano, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es abeliana, y entonces la función $\exp$ es un homomorfismo de grupos. Como $\exp$ es un difeomorfismo local alrededor de $0 \in \mathfrak{g}$, el núcleo $\Gamma = \ker \exp$ es un subgrupo discreto de $\mathfrak{g}$. Por otro lado, sabemos que la imagen de $\exp$ genera la componente conexa del elemento neutro en G, y como esa imagen es ella misma un subgrupo de G porque $\exp$ es un homomorfismo, vemos que la función $\exp$ es sobreyectiva.

El grupo Γ actua sobre $\mathfrak{g}$ por translaciones de manera propiamente discontinua, precisamente porque es un subgrupo discreto de $\mathfrak{g}$, así que el cociente $\mathfrak{g}/\Gamma$ es de manera natural una variedad y la proyección $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\Gamma$ es un revestimiento diferenciable. Es claro que existe una función $\overline{\exp} : \mathfrak{g}/G \to G$ tal que $\overline{\exp} \circ p = \exp$ y la propiedad característica de p implica que $\overline{\exp}$ es diferenciable. Más aún, como p y $\exp$ son difeomorfismos locales, $\overline{\exp}$ es un difeomorfismo local. Como se trata de hecho de una función biyectiva, vemos que $\overline{\exp}$ es un difeomorfismo.

Como Γ es discreto en $\mathfrak{g}$, se trata de un subgrupo finitamente generado y, de hecho, está generado por un subconjunto $S \subseteq \Gamma$ que es linealmente independiente en $\mathfrak{g}$. A menos de un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal $\mathfrak{g} \to \mathbb{R}^n$, podemos suponer entonces que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$ y que Γ es el subgrupo generado por $\{e_1, \dots, e_k\}$ para cierto $k \in \{0, \dots, n\}$. En ese caso hay un difeomorfismo $\mathfrak{g}/\Gamma \cong (S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Como G es compacto, debe ser $k = n$. Esto prueba el lema. □

9.4.10. Corolario. (El teorema fundamental del álgebra) *Todo polinomio no constante $f \in \mathbb{C}[X]$ tiene una raíz en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Basta mostrar que el cuerpo $\mathbb{C}$ no tiene extensiones finitas no triviales.

Supongamos, para llegar a un absurdo, que $K/\mathbb{C}$ es una extensión finita de grado $n \geq 1$. En particular, K es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión n y podemos considerar el espacio proyectivo $\mathsf{P}(K) = (K \setminus 0)/\sim$ con $\sim$ la relación en $K \setminus 0$ tal que si $x, y \in K \setminus 0$ es

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, x = \lambda y.$$

Es facil verificar que $\mathsf{P}(K)$ es una variedad difeomorfa a $\mathbb{C}\mathsf{P}^{n-1}$. Escribamos $[x]$ a la clase en $\mathsf{P}(K)$ de $x \in K \setminus 0$. Hay funciones $\mu : \mathsf{P}(K) \times \mathsf{P}(K) \to \mathsf{P}(K)$ y $\sigma : \mathsf{P}(K) \to \mathsf{P}(K)$ tales que $\mu([x],[y]) = [xy]$ para cada x, $y \in K \setminus 0$ y $\sigma([x]) = [x^{-1}]$ para cada $x \in K \setminus 0$, y es facil verificar que $(\mathsf{P}(K), \mu, \iota)$ es un grup abeliano. Más aún, las funciones μ y σ son diferenciables, así que $\mathsf{P}(K)$ es de esta forma un grupo de Lie abeliano. Como es además compacto conexo y de dimensión $2n-2$, del Lema 9.4.9 sabemos que $\mathsf{P}(K)$ es difeomorfo a un toro T^{2n-2}. Ahora bien, en la Proposición 9.4.6 vimos que $\dim H^1(T^{2n-2}) = 2n-2$ y, por otro lado, en la Proposición 9.4.8

vimos que $\dim H^1(\mathbb{C}\mathsf{P}^{n-1}) = 0$. Como $T^{2n-2} \cong \mathsf{P}(K) \cong \mathbb{C}\mathsf{P}^{n-1}$, esto es posible solamente si es $n = 1$, y concluimos así que la extensión $K/\mathbb{C}$ es trivial. □

§5. Revestimientos regulares

9.5.1. Si un grupo G actúa sobre una variedad M por difeomorfismos, para cada $g \in G$ tenemos un difeomorfismo $g : M \to M$ y éste induce un morfismo de complejos $g^* : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$.

Hay una acción de G sobre el complejo $\Omega^\bullet(M)$ por automorfismos de complejos tal que si $g \in G$, $k \geq 0$ y $\omega \in \Omega^k(M)$ es

$$g \cdot \omega = (g^{-1})^* \omega.$$

Esta acción induce una acción de G sobre la cohomología $H^\bullet(M)$: si $g \in G$, $k \geq 0$ y $\omega \in \Omega^k(M)$ es una k-forma cerrada que representa a una clase $[\omega] \in H^k(M)$, entonces $g \cdot [\omega] = [(g^{-1})^*\omega]$. Es de notar que en estas dos acciones aparece $(g^{-1})^*$ y no simplemente g^* porque, por simplicidad, queremos que todas las acciones sean *a izquierda*: si definiésemos la acción de G sobre $\Omega^\bullet(M)$ de manera que $g \cdot \omega$ fuese $g^*\omega$, obtendríamos una acción *a derecha*.

Para cada $k \geq 0$ podemos considerar el subespacio $\Omega^k(M)^G \subseteq \Omega^k(M)$ de las k-formas G-invariantes; es inmediato verificar que $\mathrm{d}(\Omega^k(M)^G) \subseteq \Omega^{k+1}(M)^G$, así que $\Omega^\bullet(M)^G$ es, de hecho, un subcomplejo de $\Omega^\bullet(M)$.

9.5.2. Proposición. *Sea $p : M \to N$ un revestimiento regular entre variedades y sea $G = \mathrm{Aut}(p)$ su grupo de automorfismos. El morfismo de complejos $p^* : \Omega^\bullet(N) \to \Omega^\bullet(M)$ toma valores en $\Omega^\bullet(M)^G$ y su correstricción $p^* : \Omega^\bullet(N) \to \Omega^\bullet(M)^G$ es un isomorfismo de complejos.* {prop:omega-inv}

Demostración. Si $\omega \in \Omega^k(N)$ y $g \in G$, entonces $g^*(p^*\omega) = (p \circ g)^*\omega = p^*\omega$: esto nos dice que $p^*\omega \in \Omega^k(M)^G$ y, en consecuencia, que el morfismo $p^* : \Omega^\bullet(N) \to \Omega^\bullet(M)$ toma valores en el subcomplejo $\Omega^\bullet(M)^G$.

Supongamos que $\omega \in \Omega^*(N)$ es tal que $p^*\omega = 0$. Sea $y \in N$ y sean $v_1, \dots, v_k \in T_yN$. Sea $x \in M$ tal que $p(x) = y$. La diferencial $p_{*x} : T_xM \to T_yN$ es un isomorfismo —porque p es localmente un difeomorfismo— y, en particular, es sobreyectiva. Existen entonces $w_1, \dots, w_k \in T_xM$ tales que $p_{*x}(w_i) = v_i$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ y

$$\omega_y(v_1, \dots, v_n) = \omega_y(p_{*x}(w_1), \dots, p_{*x}(w_k)) = (p^*\omega)_x(w_1, \dots, w_k) = 0.$$

Vemos así que $\omega_y = 0$ y, como $y \in N$ es arbitrario, que $\omega = 0$. El morfismo $p^* : \Omega^\bullet(N) \to \Omega^\bullet(M)$ es entonces inyectivo; por supuesto, su correstricción $p^* : \Omega^\bullet * (N) \to \Omega^\bullet(M)^G$ también lo es. Mostremos que esta última es sobreyectiva.

Sea U un abierto conexo bien cubierto de N, de manera que hay un conjunto I y una familia disjunta $\{U_i : i \in I\}$ de abiertos de M tales que $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$ y para cada $i \in I$ la restricción $p|_{U_i} : U_i \to U$ es un difeomorfismo. Si $i, j \in I$, entonces existe $g \in G$ tal que $g(U_i) = U_j$ y, como $p \circ g = p$, es

$$(p|_{U_j}^{-1})^*(\omega|_{U_j}) = (g \circ p|_{U_i}^{-1})^*(\omega|_{U_j}) = (p|_{U_i}^{-1})^*(g^*(\omega|_{U_j})) = (p|_{U_i}^{-1})^*(\omega|_{U_i}),$$

de manera que la forma $\bar\omega_U = (p|_{U_i}^{-1})^*(\omega) \in \Omega^k(U)$ depende solamente de U y no de i.

Si $V \subseteq U$ es un subconjunto abierto y conexo, entonces V también es un abierto bien cubierto: si para cada $i \in I$ ponemos $V_i = U_i \cap p^{-1}(V)$, entonces $\{V_i : i \in I\}$ es una familia de abiertos disjuntos de M tales que $p^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} V_i$ y para cada $i \in I$ la restricción $p|_{V_i} : V_i \to V$ es un difeomorfismo. Si escribimos ι_V e ι_{V_i} a las inclusiones $V \hookrightarrow U$ y $V_i \hookrightarrow U_i$, entonces

$$\begin{aligned}\bar\omega_U|_V &= \iota_V^*\big((p|_{U_i}^{-1})^*(\omega)\big) = \big(p|_{U_i}^{-1} \circ \iota_V\big)^*(\omega) = \big(\iota_{V_i} \circ p|_{V_i}^{-1}\big)^*(\omega) = (p_{V_i}^{-1})^*(\iota_{V_i}^*(\omega)) \\ &= (p_{V_i}^{-1})^*(\omega|_{V_i}) = \bar\omega_V.\end{aligned}$$

Usando esto, mostremos que existe exactamente una forma $\bar\omega \in \Omega^k(N)$ tal que $\bar\omega|_U = \bar\omega_U$ para cada abierto conexo bien cubierto U de N. Como los abiertos conexos bien cubiertos de N son una base de la topología de N, solo tenemos que mostrar que si U y V son dos tales abiertos es $\bar\omega_U|_{U\cap V} = \bar\omega_V|_{U\cap V}$ y basta hacer esto localmente en $U\cap V$: si $x \in U\cap V$ y $W \subseteq U\cap V$ es un abierto conexo bien cubierto de N tal que $x \in W$, lo que probamos implica que $\bar\omega_U|_W = \bar\omega_W = \bar\omega_V|_W$, como queremos.

Para terminar, mostremos que $p^*(\bar\omega) = \omega$; es suficiente probar esta igualdad localmente. Sea $x \in M$, sea $U \subseteq N$ un abierto conexo bien cubierto de N tal que $p(x) \in U$, y sea $\tilde U \subseteq N$ una de las componentes conexas de $p^{-1}(U)$, de manera que $p(\tilde U) = U$ y la restricción $p|_{\tilde U} : \tilde U \to U$ es un difeomorfismo y $\bar\omega|_U = (p|_{\tilde U}^{-1})^*(\omega|_{\tilde U})$. Entonces

$$p^*(\bar\omega)|_{\tilde U} = (p|_{\tilde U})^*(\bar\omega|_U) = (p|_{\tilde U})^*((p|_{\tilde U}^{-1})^*(\omega)) = \omega|_{\tilde U},$$

y esto completa la prueba. □

Acciones propiamente discontinuas de grupos finitos

{prop:dR:cover:fin}

9.5.3. Proposición. *Sea $p : M \to N$ un revestimiento regular de variedades y sea $G = \mathrm{Aut}(p)$ el grupo de automorfimos de p. La aplicación $p^* : H^\bullet(N) \to H^\bullet(M)$ tiene su imagen contenida en $H^\bullet(M)^G$. Más aún: si G es* finito, *entonces la correstricción a ese subespacio $p^* : H^\bullet(N) \to H^\bullet(M)^G$ es un isomorfismo.*

Demostración. La aplicación $p^* : H^\bullet(N) \to H^\bullet(M)$ es tal que $p^*([\omega]) = [p^*\omega]$ para cada forma cerrada $\omega \in \Omega^k(N)$. Si $\omega \in \Omega^k(N)$, la Proposición 9.5.2 nos dice que $p^*\omega \in \Omega^k(M)^G$ y entonces $[p^*\omega] \in H^\bullet(M)^G$: si $g \in G$, entonces $g \cdot [p^*\omega] = [(g^{-1})^*p^*\omega] = [p^*\omega]$ para cada $g \in G$. Vemos así que $p^*([\omega]) \in H^\bullet(M)^G$ y, en consecuencia, que la imagen de $p^* : H^\bullet(N) \to H^\bullet(M)$ está contenida en $H^\bullet(M)^G$, como afirma la primera parte de la proposición.

Supongamos ahora que G es finito. Sea $\omega \in \Omega^k(N)$ una forma cerrada y tal que $p^*([\omega]) = 0$, de manera que existe $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $p^*\omega = \mathrm{d}\eta$. Pongamos $\tilde\eta = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^*\eta$. Es

$$\mathrm{d}\tilde\eta = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathrm{d}g^*\eta = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^*\mathrm{d}\eta = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^*p^*\omega,$$

y, como $p^*\omega$ es G-invariante, esto es

$$= p^*\omega.$$

Por otro lado, si $h \in G$, entonces

$$h^*\tilde{\eta} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} h^*g^*\eta = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(gh)^*\eta = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^*\eta = \tilde{\eta},$$

y esto nos dice que $\tilde{\eta}$ es G-invariante. En vista de la Proposición 9.5.2, esto implica que existe una forma $\bar{\eta} \in \Omega^{k-1}(N)$ tal que $\tilde{\eta} = p^*\bar{\eta}$. Como

$$p^*\omega = \mathrm{d}\tilde{\eta} = \mathrm{d}p^*\bar{\eta} = p^*\mathrm{d}\bar{\eta},$$

y p^* es inyectiva, es $\omega = \mathrm{d}\bar{\eta}$ y entonces $[\omega] = 0$ en $H^\bullet(N)$. La función $p^* : H^\bullet(N) \to H^\bullet(M)^G$ es, en consecuencia, inyectiva. Para terminar, mostremos que es sobreyectva.

Sea $\omega \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada tal que su clase $[\omega]$ en $H^k(M)$ es G-invariante, de manera que para cada $g \in G$ es $g \cdot [\omega] = [\omega]$, esto es, existe una forma $\eta_g \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que

$$(g^{-1})^*\omega - \omega = \mathrm{d}\eta_g.$$

Sean $\tilde{\omega} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(g^{-1})^*\omega$ y $\tilde{\eta} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(g^{-1})^*\eta_g$. Como

$$\tilde{\omega} - \omega = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(g^{-1})^*\omega - \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\omega = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\big((g^{-1})^*\omega - \omega\big) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{d}\eta_g = \mathrm{d}\tilde{\eta},$$

es $[\tilde{\omega}] = [\omega]$ en $H^k(M)$ y, como $\tilde{\omega}$ es G-invariante, la Proposición 9.5.2 nos dice que existe $\xi \in \Omega^k(N)$ tal que $\tilde{\omega} = p^*\xi$. Pero entonces $p^*([\xi]) = [\omega]$, y vemos que la clase $[\omega]$ está en la imagen de $p^* : H^\bullet(N) \to H^\bullet(M)^G$, como queríamos. □

9.5.4. Corolario. *Si $n \geq 1$, entonces*

$$\dim H^k(\mathbb{R}\mathsf{P}^n) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0; \\ 1, & \text{si } k = n \text{ y } n \text{ es impar;} \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. Consideremos el grupo G de difeomorfismos de S^n generado por la involución $\sigma : x \in S^n \mapsto -x \in S^n$ y $G = \{\mathrm{id}_{S^n}, \sigma\}$, que es cíclico de orden 2. Este grupo G actúa sin puntos fijos sobre S^n, de manera que el cociente S^n/G es naturalmente una variedad, y que la proyección canónica $p : S^n \to S^n/G$ es un revestimiento regular con grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(p) = G$. Como $S^n/G \cong \mathbb{R}\mathsf{P}^n$, para probar el corolario bastará que calculemos $H^\bullet(S^n/G)$.

De acuerdo a la Proposición 9.5.3, sabemos que $H^\bullet(S^n/G) \cong H^\bullet(S^n)^G$. Se sigue de esto, en particular, que $H^k(S^n/G) = 0$ si $k \notin \{0, n\}$, porque en ese caso $H^k(S^n)^G \subseteq H^k(S^n) = 0$. El espacio vectorial $H^0(S^n)$ está generado por la clase de la función constante $\mathbf{1} : x \in S^n \mapsto 1 \in \mathbb{R}$, y es claro que ésta función es invariante bajo la acción de σ: esto nos dice que la acción de G sobre $H^0(S^n)$ es trivial y, en consecuencia, que $H^0(S^n)^G = H^0(S^n)$ tiene dimensión 1; por supuesto, esto ya lo sabíamos: S^n/G es una variedad conexa.

Sea $\nu = \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{n+1}$ la forma de volumen usual sobre $\mathbb{R}^{n+1}$, consideremos el campo $X = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$, sea $j : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ la inclusión y consideremos la n-forma

$$\omega = j^*\iota_X\nu \in \Omega^n(S^n).$$

Se trata de una forma de volumen sobre S^n así que, como la esfera es compacta y sin borde, la clase $[\omega]$ es un elemento no nulo de $H^n(S^n)$. Como este último espacio tiene dimensión 1, esto nos dice que $\{[\omega]\}$ es, de hecho, una de sus bases. Sea $\tilde{\sigma} : x \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto -x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Es claro que $\tilde{\sigma}^*\nu = (-1)^{n+1}\nu$, que $\tilde{\sigma}_* X = X$ y que $j \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ j$, y entonces

Esto debería estar probado en algún lado!

$$\sigma^*\omega = \sigma^* j^* \iota_X \nu = j^* \tilde{\sigma}^* \iota_X \nu = j^* \iota_{\sigma_* X}(\tilde{\sigma}^*\nu) = (-1)^{n+1} j^* \iota_X \nu = (-1)^{n+1}\omega.$$

Esto nos dice que $\sigma^* \cdot [\omega] = (-1)^{n+1}[\omega]$ en $H^n(S^n)$, y entonces $H^n(S^n/G) \cong H^n(S^n)^G$ es o bien $H^n(S^n)$ o bien nulo, dependiendo de si n es impar o par, respectivamente. □

9.5.5. Corolario. *Si K es la botella de Klein, entonces*

$$\dim H^k(K) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \text{ o } k = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. Sean $\sigma : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x+1, -y) \in \mathbb{R}^2$ y $\tau : (x, y) \in \mathbb{R}^n \mapsto (x, y+1) \in \mathbb{R}^2$, que son dos difeomorfismos de $\mathbb{R}^2$, y sea $G = \langle \sigma, \tau \rangle \subseteq \mathsf{Diff}(\mathbb{R}^2)$ el subgrupo que generan. Es inmediato verificar que $\tau\sigma = \sigma\tau^{-1}$, y si $i, j \in \mathbb{Z}$ son tales que $\tau^i\sigma^j = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ entonces $i = j = 0$; en particular, es $G = \{\tau^i\sigma^j : i, j \in \mathbb{Z}\}$. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $U = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) \times (y - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$ es un entorno abierto de (x, y) en $\mathbb{R}^2$ tal que si $g \in G$ y $gU \cap U \neq \varnothing$ entonces $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Esto nos dice que la acción de G sobre $\mathbb{R}^2$ es propiamente discontinua y, en consecuencia, que el cociente $K = \mathbb{R}^2/G$ es una variedad de manera tal que la proyección $\pi_G : \mathbb{R}^2 \to K$ es un difeomorfismo local.

El subgrupo $H = \langle \sigma^2, \tau \rangle \subseteq G$ es isomorfo a $\mathbb{Z}^2$ y normal en G de indice $[G : H] = 2$, y el cociente G/H está generado por la clase de σ. El cociente $T = \mathbb{R}^2/H$ es difeomorfo a un toro $S^1 \times S^1$. Si $p_H : \mathbb{R}^2 \to T$ es la proyección correspondiente, existe una única función $q : T \to K$ tal que $q \circ p_H = p_G$, y es fácil ver que q es un revestimiento regular de dos hojas con grupo de automorfismos $Q = \mathsf{Aut}(q)$ generado por el difeomorfismo de orden dos $\bar{\sigma} : T \to T$ inducido por $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

La proposición nos dice que $H^\bullet(K) = H^\bullet(T)^Q$. Sabemos que hay formas $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(T)$ tales que $p_H^*\omega_1 = \mathrm{d}x$ y $p_H^*\omega_2 = \mathrm{d}y$, y que $\{[\omega_1], [\omega_2]\}$ es una base de $H^1(T)$ y $\{[\omega_1 \wedge \omega_2]\}$ una de $H^2(T)$. Como $\sigma^*(\mathrm{d}x) = \mathrm{d}x$ y $\sigma^*(\mathrm{d}y) = -\mathrm{d}y$, es $\bar{\sigma}^*(\omega_1) = \omega_1$, $\bar{\sigma}^*(\omega_2) = -\omega_2$ y, en consecuencia, $\bar{\sigma}^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = -\omega_1 \wedge \omega_2$. De esto se sigue fácilmente que $H^1(T)^Q$ está generado por $[\omega_1]$, y que $H^2(T)^Q = 0$. Como K es conexo, $H^0(K) \cong \mathbb{R}$. El corolario queda así probado. □

Acciones propiamente discontinuas de grupos cíclico infinitos

9.5.6. La conclusión de la Proposición 9.5.3 no puede obtenerse en general si el grupo de automorfismos del revestimiento no es finito. Por ejemplo, la función $p : t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in S^1$ es un revestimiento con grupo de automorfismos $G = \mathsf{Aut}(p) \cong \mathbb{Z}$, generado por $t \in \mathbb{R} \mapsto t + 1 \in \mathbb{R}$, pero $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$ no es isomorfo a $H^1(\mathbb{R})^G = 0$. {p:dR:cover:no}

9.5.7. Supongamos que M es una variedad sobre la que actúa un grupo G y sea $\Omega^\bullet(M)^G \subseteq \Omega^\bullet(M)$ el subcomplejo de las formas G-invariantes sobre M. La inclusión $i : \Omega^\bullet(M)^G \to \Omega^\bullet(M)$ induce en la cohomología un morfismo $H(i) : H(\Omega^\bullet(M)^G) \to H^\bullet(M)$, y es claro que su imagen está {p:dR:Z:Hi} contenida en el subespacio $H^\bullet(M)^G \subseteq H^\bullet(M)$ de las clases de cohomología G-invariantes. Podemos entonces considerar la correstricción

$$H(i) : H(\Omega^\bullet(M)^G) \to H^\bullet(M)^G.$$

Este morfismo no es en general ni inyectivo ni sobreyectivo; la prueba de la Proposición 9.5.3 consiste en parte en la verificación de que $H(i)$ es un isomorfismo cuando G es finito, y el ejempo de 9.5.6 proviene de una situación en la que $H(i)$ no es inyectivo. Nos proponemos analizar en detalle lo que sucede cuando el grupo G es cíclico infinito y la acción de G sobre M es propiamente discontinua.

9.5.8. La observación central en ese contexto es la siguiente:

{lema:dR:Z:wi}

Lema. *Sea G un grupo cíclico infinito y sea $\tau \in G$ un generador. Si G actúa sobre una variedad M de manera propiamente discontinua, entonces para todo $r \geq 0$ y toda forma $\omega \in \Omega^r(M)$ existe una forma $\eta \in \Omega^r(M)$ tal que $\tau^*\eta - \eta = \omega$.*

Demostración. Como la acción de G sobre M es propiamente discontinua, el cociente $N = M/G$ es una variedad de manera tal que la proyección canónica $p : M \to N$ es un revestimiento diferenciable con grupo de automorfismos $\operatorname{Aut}(p) = G$. Sea $\mathscr{U}$ un cubrimiento de N por abiertos bien cubiertos por p; como N tiene base numerable, podemos suponer que $\mathscr{U}$ es localmente finito —si ese no es el caso, basta sustituir a $\mathscr{U}$ por un cubrimiento localmente finito que lo refine, y los abiertos de éste también estarán bien cubiertos por p. Sea $\mathscr{F} = \{\chi_U : U \in \mathscr{U}\} \subseteq C^\infty(N)$ una partición de la unidad sobre N subordinada a $\mathscr{U}$, de manera que $\operatorname{sop} \chi_U \subseteq U$ para todo $U \in \mathscr{U}$.

Para cada $U \in \mathscr{U}$ sea $\tilde U \subseteq M$ un abierto tal que la restricción $p|_{\tilde U} : \tilde U \to U$ es un difeomorfismo y para el cual se tenga que si $k \in \mathbb{Z}$ y $\tau^k(\tilde U) \cap \tilde U \neq \varnothing$ entonces $k = 0$. Si $k \in \mathbb{Z}$ y $U \in \mathscr{U}$, hay una única función $\tilde\chi_U^k \in C^\infty(M)$ tal que $\operatorname{sop} \tilde\chi_U^k \subseteq \tau^k(\tilde U)$ y $\tilde\chi_U^k|_{\tau^k(\tilde U)} = \chi_U \circ p$. Mostremos que

$$\tilde{\mathscr{U}} = \{\tau^k(\tilde U) : U \in \mathscr{U}, k \in \mathbb{Z}\} \text{ es un cubrimiento localmente finito de } M \tag{32}$$ {eq:dR:Z:1}

y que

$$\tilde{\mathscr{F}} = \{\tilde\chi_U^k : U \in \mathscr{U}, k \in \mathbb{Z}\} \text{ es una partición de la unidad sobre } M \text{ subordinada a } \tilde{\mathscr{U}}. \tag{33}$$ {eq:dR:Z:2}

Sea $x \in M$. Como $\mathscr{U}$ es localmente finito y los abiertos de N conexos y bien cubiertos por p forman una base de la topología de N, existe un abierto conexo $W \subseteq N$ bien cubierto por p que contiene a $p(x)$ y tal que el conjunto $I = \{U \in \mathscr{U} : U \cap W \neq \varnothing\}$ es finito. Sea $\tilde W$ el abierto de M tal que $x \in \tilde W$, $p(\tilde W) = W$ y $p|_{\tilde W} : \tilde W \to W$ es un difeomorfismo. Pongamos $J = \{(U,k) \in \mathscr{U} \times \mathbb{Z} : \tau^k(\tilde U) \cap \tilde W \neq \varnothing\}$ y mostremos que J es finito.

Si $(U,k) \in J$, entonces $\varnothing \neq p(\tau^k(\tilde U) \cap \tilde W) = p(\tau^k(\tilde U)) \cap p(\tilde W) = U \cap W$, de manera que $U \in I$. Hay, entonces, una función $\phi : (U,k) \in J \mapsto U \in I$. Más aún, si $U \in \mathscr{U}$ y $k, l \in \mathbb{Z}$ son tales que (U,k), $(U,l) \in J$, entonces como recién es $p(\tau^l(\tilde U) \cap \tilde W) = U \cap W = p(\tau^l(\tilde U) \cap \tilde W)$ y, como la restricción $p|_{\tilde W}$ es inyectiva, $\tau^l(\tilde U) \cap \tilde W = \tau^k(\tilde U) \cap \tilde W$ y $\tau^l(\tilde U) \cap \tau^k(\tilde U) \neq \varnothing$. La elección de $\tilde U$, entonces, implica que $k = l$ y esto muestra que la función ϕ es inyectiva: J debe ser finito y, en consecuencia, la afirmación (32) queda probada. Para (33) es suficiente, a esta altura, que mostremos que

$$\sum_{\chi \in \tilde{\mathscr{F}}} \chi(x) = 1. \tag{34}$$ {eq:dR:Z:3}

De la construcción de los elementos de $\tilde{\mathscr{F}}$ es claro que si $U \in \mathscr{U}$ y $k \in \mathbb{Z}$ son tales que $\tilde{\chi}_U^k(x) \neq 0$, entonces $(U, k) \in J$, y esto implica que

$$\sum_{\chi \in \tilde{\mathscr{F}}} \chi(x) = \sum_{(U,k) \in J} \tilde{\chi}_U^k(x) = \sum_{(U,k) \in J} \chi_U(p(x)).$$

Como sabemos que $\sum_{U \in I} \chi_U(p(x)) = 1$, para probar (34) es suficiente que mostremos que la función inyectiva ϕ que definimos arriba es sobreyectiva. Sea entonces $U \in I$, de manera que existe $y \in U \cap W$. Como $p(\tilde{W}) = W$, existe $\tilde{y} \in \tilde{W}$ con $p(\tilde{y}) = y$ y, como $p^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \tau^k(\tilde{U})$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\tilde{y} \in \tau^k(\tilde{U})$. Así, es $(U, k) \in J$ porque $\tilde{y} \in \tau^k(\tilde{U}) \cap \tilde{W}$, y $\phi(U, k) = U$, de manera que U está en la imagen de ϕ.

Probemos ahora el lema. Sea $r \geq 0$ y $\omega \in \Omega^r(M)$. Si $U \in \mathscr{U}$ y $k \in \mathbb{Z}$, pongamos

$$\eta_U^k = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} (\tau^i)^*(\tilde{\chi}_U^i \omega), & \text{si } k > 0; \\ 0, & \text{si } k = 0; \\ \sum_{i=-k}^{-1} (\tau^i)^*(\tilde{\chi}_U^i \omega), & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Es inmediato verificar que

$$\eta_U^{k+1} - \eta_U^k = (\tau^k)^*(\tilde{\chi}_U^k \omega) \text{ para todo } U \in \mathscr{U} \text{ y todo } k \in \mathbb{Z}. \tag{35}$$ {eq:dR:Z:4}

Como para todo $i \in \mathbb{Z}$ el soporte de $(\tau^i)^*(\tilde{\chi}_U^i \omega)$ está contenido en $\tilde{U}$, el soporte de η_U^k está también contenido en $\tilde{U}$ cualquiera sea k. Podemos entonces definir una forma $\eta \in \Omega^r(M)$ poniendo

$$\eta = \sum_{\substack{U \in \mathscr{U} \\ k \in \mathbb{Z}}} (\tau^{-k})^*(\eta_U^k),$$

ya que la suma es localmente finita: el sumando correspondiente a $U \in \mathscr{U}$ y a $k \in \mathbb{Z}$ tiene soporte contenido en $\tau^k(\tilde{U})$. Ahora calculamos:

$$\tau^*\eta - \eta = \sum_{\substack{U \in \mathscr{U} \\ k \in \mathbb{Z}}} (\tau^{-k+1})^*(\eta_U^k) - \sum_{\substack{U \in \mathscr{U} \\ k \in \mathbb{Z}}} (\tau^{-k})^*(\eta_U^k)$$

y cambiando a k en la primera suma por $k+1$ vemos que esto es

$$= \sum_{\substack{U \in \mathscr{U} \\ k \in \mathbb{Z}}} (\tau^{-k})^*(\eta_U^{k+1}) - \sum_{\substack{U \in \mathscr{U} \\ k \in \mathbb{Z}}} (\tau^{-k})^*(\eta_U^k) = \sum_{\substack{U \in \mathscr{U} \\ k \in \mathbb{Z}}} (\tau^{-k})^*(\eta_U^{k+1} - \eta_U^k).$$

Usando (35), esto nos dice que

$$\tau^*\eta - \eta = \sum_{\substack{U \in \mathscr{U} \\ k \in \mathbb{Z}}} (\tau^{-k})^* i\big((\tau^k)^*(\tilde{\chi}_U^k \omega)\big) = \sum_{\substack{U \in \mathscr{U} \\ k \in \mathbb{Z}}} \tilde{\chi}_U^k \omega = \omega,$$

ya que la familia $\tilde{\mathscr{F}}$ es una partición de la unidad. Esto prueba el lema. □

{corolario:dR:Z:epi}

9.5.9. Corolario. *Si G es un grupo cíclico infinito que actúa de manera propiamente discontinua sobre una variedad M, entonces el morfismo $H(i) : H(\Omega^\bullet(M)^G) \to H^\bullet(M)^G$ construido en 9.5.7 es sobreyectivo.*

Demostración. Sea, como antes, τ un generador de G. Sea $k \geq 0$ y sea $\omega \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada tal que la clase $[\omega] \in H^k(M)$ está en $H^k(M)^G$. Existe, en particular, $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\tau^*\omega - \omega = \mathrm{d}\eta$ y, más aún, el Lema 9.5.8 asegura la existencia de una k-forma $\xi \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\tau^*\xi - \xi = \eta$. Es

$$\tau^*\omega - \omega = \tau^*\mathrm{d}\xi - \mathrm{d}\xi \tag{36}$$ {eq:dR:Z:5}

y entonces la forma $\omega' = \omega - \mathrm{d}\xi$ es G-invariante. En efecto, esto sigue de que τ genera a G y de que la igualdad (36) implica inmediatamente que $\tau^*\omega' = \omega'$. Como claramente ω' es cerrada, su clase es un elemento $[\omega'] \in H^k(\Omega^\bullet(M)^G)$ cuya imagen por $H(i)$ es $H(i)([\omega']) = [\omega'] = [\omega]$. Esto prueba que $H(i)$ es sobreyectivo, como queríamos. □

9.5.10. Supongamos ahora que $\omega \in \Omega^k(M)^G$ es una k-forma invariante sobre M que es cerrada y cuya clase $[\omega] \in H^k(\Omega^\bullet(M)^G)$ está en el núcleo del morfismo $H(i)$. Esto significa que hay una forma $\xi \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\omega = \mathrm{d}\xi$. Como ω es G-invariante, es

$$0 = \tau^*\omega - \omega = \tau^*\mathrm{d}\xi - \mathrm{d}\xi = \mathrm{d}(\tau^*\xi - \xi),$$

y entonces la forma $\tau^*\xi - \xi$ es cerrada, de manera que representa una clase $[\tau^*\xi - \xi] \in H^{k-1}(M)$. Si $\xi' \in \Omega^{k-1}(M)$ es otra forma tal que $\omega = \mathrm{d}\xi'$, no es cierto que $[\tau^*\xi' - \xi']$ sea igual a $[\tau^*\xi - \xi]$. Pero $\mathrm{d}(\xi - \xi') = 0$, de manera que tenemos una clase $[\xi - \xi'] \in H^{k-1}(M)$, y es

$$[\tau^*\xi - \xi] - [\tau^*\xi' - \xi'] = \tau^*[\xi - \xi'] - [\xi - \xi'],$$

así que si escribimos $(\tau^* - 1)H^{k-1}(M)$ a la imagen del endomorfismo

$$\alpha \in H^{k-1}(M) \longmapsto \tau^*\alpha - \alpha \in H^{k-1}(M),$$

las clases de $[\tau^*\xi - \xi]$ y de $[\tau^*\xi' - \xi']$ en el cociente

$$H^{k-1}(M)_G := \frac{H^{k-1}(M)}{(\tau^* - 1)H^{k-1}(M)}$$

son iguales. En otras palabras, la clase

$$[\tau^*\xi - \xi] + (\tau^* - 1)H^{k-1}(M) \in H^{k-1}(M)_G$$

depende solamente de ω. Elaborando esta observación podemos llegar al siguiente resultado:

{prop:dR:Z}

9.5.11. Proposición. *Si G es un grupo cíclico infinito que actúa de manera propiamente discontinua sobre una variedad M, entonces para cada $k \geq 0$ hay una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow H^{k-1}(M)_G \xrightarrow{\Phi} H^k(\Omega^\bullet(M)^G) \xrightarrow{H(i)} H^k(M)^G \longrightarrow 0$$

Demostración. Sea, como antes, $\tau \in G$ un generador. Si $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ es una forma cerrada, escribimos $[\omega]$ a su clase en $H^{k-1}(M)$ y $[\![\omega]\!] = [\omega] + (\tau^* - 1)H^{k-1}(M)$ a la clase de $[\omega]$ en $H^{k-1}(M)_G$.

Sea $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ una forma cerrada. El Lema 9.5.8 nos dice que existe $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\tau^*\eta - \eta = \omega$ y entonces $\tau^*\mathrm{d}\eta - \mathrm{d}\eta = \mathrm{d}(\tau^*\eta - \eta) = \mathrm{d}\omega = 0$: así, la forma $\mathrm{d}\eta$ es G-invariante y, como es cerrada, tenemos una clase $[\mathrm{d}\eta] \in H^k(\Omega^\bullet(M)^G)$. Queremos probar que $[\mathrm{d}\eta]$ depende solamente de $[\![\omega]\!] \in H^{k-1}(M)_G$.

- Sea primero $\eta' \in \Omega^{k-1}(M)$ otra forma tal que $\tau^*\eta' - \eta' = \omega$. Como también $\tau^*\eta - \eta = \omega$, vemos que $\tau^*(\eta' - \eta) = \eta' - \eta$ y, entonces, que $\eta' - \eta \in \Omega^{k-1}(M)^G$. Se sigue de esto que
$$\mathrm{d}\eta' = \mathrm{d}\eta + \mathrm{d}(\eta' - \eta) \in \mathrm{d}\eta + \mathrm{d}(\Omega^{k-1}(M)^G),$$
de manera que $[\mathrm{d}\eta'] = [\mathrm{d}\eta]$ en $H^k(\Omega^\bullet(M)^G)$.
- En segundo lugar, supongamos que $\omega' \in \Omega^k(M)$ es otra forma cerrada tal que $[\![\omega']\!] = [\![\omega]\!]$ en $H^{k-1}(M)_G$, y sea $\eta' \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\tau^*\eta' - \eta' = \omega'$. Hay entonces una forma cerrada $\nu \in \Omega^{k-1}(M)$ con $[\omega'] - [\omega] = [\tau^*\nu - \nu]$ en $H^{k-1}(M)$, así que existe $\mu \in \Omega^{k-2}(M)$ tal que $\omega' - \omega = \tau^*\nu - \nu - \mathrm{d}\mu$, y el Lema 9.5.8 nos provee una forma $\rho \in \Omega^{k-2}(M)$ tal que $\tau^*\rho - \rho = \mu$. Como
$$\tau^*(\eta' - \eta - \nu - \mathrm{d}\rho) - (\eta' - \eta - \nu - \mathrm{d}\rho) = \omega' - \omega - \tau^*\nu + \nu - \mathrm{d}(\tau^*\rho - \rho) = 0,$$
es $\eta' - \eta - \nu - \mathrm{d}\rho \in \Omega^{k-1}(M)^G$ y, en consecuencia,
$$\mathrm{d}\eta' = \mathrm{d}\eta + \mathrm{d}(\eta' - \eta - \nu - \mathrm{d}\rho) \in \mathrm{d}\eta + \mathrm{d}(\Omega^{k-1}(M)^G),$$
esto es, $[\mathrm{d}\eta'] = [\mathrm{d}\eta]$ en $H^k(\Omega^\bullet(M)^G)$.

Concluimos así que hay una función $\Phi : H^{k-1}(M)_G \to H^k(\Omega^\bullet(M)^G)$ tal que si $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ es una forma cerrada y $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ es tal que $\tau^*\eta - \eta = \omega$, se tiene $\Phi([\![\omega]\!]) = [\mathrm{d}\eta]$; es inmediato verificar que esta función es lineal.

Sea $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ una forma cerrada tal que la clase $[\![\omega]\!]$ de $[\omega] \in H^{k-1}(M)$ en $H^{k-1}(M)_G$ está en el núcleo de Φ. Si $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ es tal que $\tau^*\eta - \eta = \omega$, esto significa que $[\mathrm{d}\eta] = 0$ en $H^k(\Omega^\bullet(M)^G)$ y entonces existe $\xi \in \Omega^{k-1}(M)^G$ tal que $\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\xi$. Se sigue de esto que la forma $\eta - \xi$ es cerrada, de manera que $[\eta - \xi] \in H^{k-1}(M)$ y, como $\omega = \tau^*(\eta - \xi) - (\eta - \xi)$, es $[\omega] = (\tau^* - 1)[\eta - \xi] \in (\tau^* - 1)H^{k-1}(M)$ y, en definitiva, $[\![\omega]\!] = 0$. Esto prueba que Φ es inyectiva.

Como sabemos, del Corolario 9.5.9, que el morfismo $H(i)$ es sobreyectivo, para probar la exactitud que se afirma en el enunciado de la proposición bastará probar la exactitud en $H^k(\Omega^\bullet(M)^G)$. Sea $\omega \in \Omega^k(M)^G$ una forma cerrada tal que su clase $[\omega] \in H^k(\Omega^\bullet(M)^G)$ está en el núcleo de $H(i)$. Esto quiere decir que existe una forma $\xi \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\omega = \mathrm{d}\xi$. Como ω es G-invariante,
$$0 = \tau^*\omega - \omega = \tau^*\mathrm{d}\xi - \mathrm{d}\xi = \mathrm{d}(\tau^*\xi - \xi),$$
asi que $\zeta = \tau^\xi - \xi \in \Omega^{k-1}(M)$ es cerrada. Es claro, en vista de la definición de ζ y del morfismo Φ, que $\Phi([\![\zeta]\!]) = [\omega]$. Esto prueba lo que queríamos: que $\operatorname{im}\Phi = \ker H(i)$. □

9.5.12. Es inmediato ahora obtener una descripción para la cohomología de un cociente por un grupo cíclico infinito que actúa de manera propiamente discontinua:

{corolario:dR:ZZ}

Corolario. *Sea G un grupo cíclico infinito que actúa de manera propiamente discontinua sobre una variedad M y sea $N = M/G$ la variedad cociente. Para cada $k \geq 0$ hay una sucesión exacta corta*
$$0 \longrightarrow H^{k-1}(M)_G \longrightarrow H^k(N) \longrightarrow H^k(M)_G \longrightarrow 0$$

Demostración. Sea $p : M \to N$ la proyección, que es un revestimiento regular con grupo de automorfismos $\mathsf{Aut}(p) = G$. De la Proposición 9.5.2 sabemos que p induce un isomorfismo $\Omega^\bullet(N) \cong \Omega^\bullet(M)^G$, así que $H^\bullet(N) \cong H(\Omega^\bullet(M)^G)$. El corolario es entonces consecuencia inmediata de la Proposición 9.5.11. □

9.5.13. Si en este corolario ponemos $M = \mathbb{R}$ y $G = \mathbb{Z}$ actuando por translaciones, el revestimiento $p : M \to N$ se identifica con el revestimiento usual $\mathbb{R} \to S^1$, y entonces tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{R})_G \longrightarrow H^1(S^1) \longrightarrow H^1(\mathbb{R})^G \longrightarrow 0$$

El morfismo $H^1(S^1) \to H^1(\mathbb{R})^G$ es nulo —esto fue lo que observamos en 9.5.6— pero como G actúa trivialmente sobre $H^0(\mathbb{R})$, es $H^0(\mathbb{R})_G \cong H^0(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, y esta sucesión exacta muestra que $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$, como sabíamos. Más generalmente podemos usar el Corolario 9.5.12 para recalcular la cohomología de los toros:

{prop:dR:Z:toros}

9.5.14. Proposición. (i) *Si M es una variedad, para cada $k \geq 0$ hay un isomorfismo*

$$H^k(M \times S^1) \cong H^k(M) \oplus H^{k-1}(M).$$

(ii) *Para cada $n \geq 0$ y cada $k \in \{0, \dots, n\}$ es* $\dim H^k(T^n) = \binom{n}{k}$.

Demostración. *(i)* El grupo $G = \mathbb{Z}$ actúa sobre $M \times \mathbb{R}$ de manera propiamente discontinua con $n \cdot (x, t) = (x, n + t)$ para cada $n \in G$ y cada $(x, t) \in M \times \mathbb{R}$, y es claro que hay un difeomorfismo $M \times S^1 \cong (M \times \mathbb{R})/G$. El Corolario 9.5.12 nos da entonces una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow H^{k-1}(M \times \mathbb{R})_G \longrightarrow H^k(M \times S^1) \longrightarrow H^k(M \times \mathbb{R})^G \longrightarrow 0$$

para cada $k \geq 0$. La función $H : (s, (x, t)) \in \mathbb{R} \times (M \times \mathbb{R}) \mapsto (x, s + t) \in M \times \mathbb{R}$ es diferenciable, es $H(0, -) = \mathrm{id}_{M \times \mathbb{R}}$ y, para todo $n \in \mathbb{Z}$, la función $H(n, -) : M \to M$ coincide con la acción de n sobre $M \times \mathbb{R}$: esto nos dice que todos los elementos de G actúan sobre M por difeomorfismos homotópicos a la identidad de M y, en consecuencia, que la acción de G sobre $H^\bullet(M)$ es trivial. Esto implica que $H^\bullet(M \times \mathbb{R})^G \cong H^\bullet(M \times \mathbb{R})_G \cong H^\bullet(M \times \mathbb{R})$. Como además $H^\bullet(M \times \mathbb{R}) \cong H^\bullet(M)$, la sucesión exacta 9.5.13 nos da entonces para cada $k \geq 0$ un isomorfismo $H^k(M \times S^1) \cong H^k(M) \oplus H^{k-1}(M)$, como quereremos.

(ii) Recordando que el toro T^n de dimensión n es $S^1 \times \cdots \times S^1$ con n factores, el resultado de *(i)* y una inducción evidente prueban que para todo $k \geq 0$ es

$$H^k(M \times T^n) \cong \bigoplus_{0 \leq i \leq n} H^{k-i}(M)^{\binom{n}{i}}. \tag{37}$$

{eq:dR:times-s1:2}

para toda variedad M. En particular, si M tiene un único punto, es $H^k(M) = 0$ para todo $k > 0$ y $M \times T^n \cong T^n$, y entonces el isomorfismo (37) nos dice que $H^k(T^n) \cong H^0(M)^{\binom{n}{i}}$. Como $H^0(M) \cong \mathbb{R}$, esto completa la prueba. □

La suspensión de un difeomofismo

9.5.15. Si M es una variedad y $f : M \to M$ es un difeomorfismo, hay una una acción de $\mathbb{Z}$ sobre el producto $\mathbb{R} \times M$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$ y cata $(x, t) \in M \times \mathbb{R}$ es

$$n \cdot (x, t) = (f^n(x), n + t).$$

Esta acción es propiamente discontinua, así que el cociente $S_f M = (M \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$ es una variedad. Llamamos a $S_f M$ la ***suspensión del difeomorfismo** f*. Tres instancias de esta construcción ya nos son familiares:

- Si M es una variedad cualquiera y $f = \mathrm{id}_M$, entonces esta es precisamente la construcción que hicimos en la prueba de la primera parte de la Proposición 9.5.14, y $S_{\mathrm{id}_M} M \cong M \times S^1$.
- Si $M = (-1, 1)$ y $f : t \in M \mapsto -t \in M$, entonces $S_f M$ es una banda de Möbius.
- Finalmente, si $M = S^1$ y $f : (x, y) \in M \mapsto (x, -y) \in M$, entonces $S_f M$ es la botella de Klein.

{prop:dR:Z:Sf}

9.5.16. Proposición. *Sea M una variedad y sea $f : M \to M$ un difeomorfismo. Como siempre, sea $f^* : H^\bullet(M) \to H^\bullet * (M)$ el homomorfismo inducido por f en la cohomología de M y escribamos, para cada $k \geq 0$,*

$$H^k(M)^f = \{\alpha \in H^k(M) : f^*(\alpha) = \alpha\}$$

y

$$H^k(M)_f = \frac{H^k(M)}{(f^* - 1)H^k(M)},$$

con $(f^* - 1)H^k(M) = \{f^*\alpha - \alpha : \alpha \in H^k(M)\}$. Entonces hay una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow H^{k-1}(M)_f \longrightarrow H^k(S_f M) \longrightarrow H^k(M)^f \longrightarrow 0$$

Demostración. Esto es consecuencia inmediata del Corolario 9.5.12. Tenemos solamente que mostrar que hay isomorfismos $H^{k-1}(M)_f \cong H^{k-1}(M \times \mathbb{R})_{\mathbb{Z}}$ y $H^k(M)^f \cong H^k(M \times \mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$.

Hagamos actuar al grupo $\mathbb{Z}$ sobre M de manera que sea $n \cdot x = f^n(x)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ y cada $x \in M$. La primera proyección $p : (x, t) \in M \times \mathbb{R} \mapsto x \in M$ induce un isomorfismo $p^* : H^\bullet(M) \to H^\bullet(M \times \mathbb{R})$ y, como para cada $n \in \mathbb{Z}$ y cada $(x, t) \in M \times \mathbb{R}$ vale que

$$p(n \cdot (x, t)) = f^n(p(x, t)),$$

el morfismo p^* es compatible con las acciones de $\mathbb{Z}$ sobre $H^\bullet(M)$ y sobre $H^\bullet(M \times \mathbb{R})$. Se sigue de esto que p^* induce isomorfismos $H^\bullet(M)_{\mathbb{Z}} \cong H^\bullet(M \times \mathbb{R})_{\mathbb{Z}}$ y $H^\bullet(M)^{\mathbb{Z}} \cong H^\bullet(M \times \mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$. Finalmente, es claro que $H^\bullet(M)_{\mathbb{Z}} = H^\bullet(M)_f$ y que $H^\bullet(M)^{\mathbb{Z}} = H^\bullet(M)^f$. □

9.5.17. Usando esta proposición podemos reobtener los siguientes cálculos que habíamos hecho:

Corolario. *Si M es la banda de Möbius o la botella de Klein, entonces*

$$\dim H^k(M) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \in \{0, 1\}; \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. Si M es la banda de Möbius, observamos ya que hay un difeomorfismo $M \cong S_f N$ con $N = (-1, 1)$ y $f : t \in N \mapsto -t \in N$. Como N es contráctil, $H^0(N) \cong \mathbb{R}$ y $H^k(N) = 0$ si $k > 0$. El morfismo $f^* : H^0(N) \to H^0(N)$ es la identidad, así que $H^0(N)^f = H^0(N) \cong H^0(N)_f \cong \mathbb{R}$. La sucesión exacta de la Proposicion 9.5.16 nos dice entonces que $H^0(M) \cong H^0(N)^f \cong \mathbb{R}$, $H^1(M) \cong H^1(N)^f \oplus H^0(N)_f \cong \mathbb{R}$ y que $H^k(M) \cong H^k(N)^f \oplus H^{k-1}(N)_f = 0$ para todo $k \geq 0$.

Sea ahora M la botella de Klein, de manera que hay un difeomorfismo $M \cong S_f N$ con $N = S^1$ y $f : (x, y) \in S^1 \mapsto (x, -y) \in S^1$. De la Proposición 9.5.16 tenemos, para cada $k \geq 0$, un isomorfismo

$$H^k(M) \cong H^k(S^1)^f \oplus H^{k-1}(S^1)_f. \tag{38}$$

{eq:dR:Z:K-1}

Es claro que el morfismo $f^* : H^0(S^1) \to H^0(S^1)$ es la identidad, así que

$$H^0(S^1)^f \cong H^0(S^1)_f \cong H^0(S^1) \cong \mathbb{R}. \tag{39}$$ {eq:dR:Z:K-2}

Por otro lado, si $\omega = -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ e $\iota : S^1 \to \mathbb{R}^2$ es la inclusión, sabemos de la Proposición 9.4.2 que $\eta = \iota^*\omega \in \Omega^1(S^1)$ representa un generador no nulo de $H^1(S^1)$. Si $\tilde{f} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, -y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $f^*\omega = -\omega$ y $\iota \circ f = \tilde{f} \circ \iota$, así que

$$f^*\eta = f^*\iota^*\omega = \iota^*\tilde{f}^*\omega = -\iota^*\omega = -\eta.$$

Esto nos dice que el morfismo $f^* : H^1(S^1) \to H^1(S^1)$ es la multiplicación por -1, y entonces

$$H^1(S^1)^f \cong H^1(S^1)_f \cong 0. \tag{40}$$ {eq:dR:Z:K-3}

De los isomofismos (38), (39) y (40) se deducen inmediatamente las afirmaciones del enunciado sobre $H^\bullet(M)$. $\square$

A. Un lema topológico

{appendix:top}

Fijemos, a lo largo de toda esta sección, un conjunto X y una familia $\mathscr{F} = \{f_i : Y_i \to X\}_{i\in I}$ de funciones cuyos dominios son espacios topológicos y cuyas imágenes cubren X. Para cada $i \in I$ escribamos $U_i = f_i(Y_i)$.

{prop:top-1}

1.0.18. Proposición. *Existe una topología τ sobre X que es la mayor topología para la cual resultan continuas todas las funciones de $\mathscr{F}$. Si $V \subseteq X$, entonces*

$$V \in \tau \iff \text{para todo } i \in I \text{ la preimagen } f_i^{-1}(V) \text{ es un abierto en } Y_i.$$

Demostración. Sea τ la topología sobre X que tiene como subbase a la unión de todas las topologías sobre X que hacen continuas a las funciones de $\mathscr{F}$; esto tiene sentido porque existen topologías sobre X con esta propiedad, como la indiscreta. Notemos que τ hace continuas a las funciones de $\mathscr{F}$: para verificar que una función es continua alcanza con probar que la preimagen de cada elemento de una subbase de la topología del codominio es un abierto del dominio y en nuestra situación esto es inmediato. La construcción misma de τ prueba que es la mayor topología con esa propiedad.

Si un conjunto $V \subseteq X$ es tal que para cada $i \in I$ es $f_i^{-1}(V)$ un abierto de Y_i, entonces $\tau \cup \{V\}$ es subbase de una topología que hace continuas a todas las funciones de $\mathscr{F}$: debe ser $\tau \cup \{V\} \subseteq \tau$ y, entonces, $V \in \tau$. Recíprocamente, si $V \in \tau$ e $i \in I$, el conjunto $f_i^{-1}(V)$ es un abierto de Y_i, porque f_i es continua. □

{prop:top-2}

1.0.19. Proposición. *Supongamos que*

- *para cada $i \in I$ la función f_i es inyectiva, y que*
- *para cada $i, j \in I$ se tiene que $f_i^{-1}(U_j)$ es un abierto en Y_i y la composición*

$$\begin{tikzcd} f_i^{-1}(U_j) \arrow[r, "f_i"] & U_i \cap U_j \arrow[r, "f_j^{-1}"] & f_j^{-1}(U_i) \end{tikzcd}$$

es un homeomorfismo,

Entonces para cada $j \in I$ el conjunto U_j es un abierto de τ y la función f_j es un homeomorfismo a su imagen.

Demostración. Fijemos $j \in I$. Se tiene que $f_j(U_j) \in \tau$: en efecto, parte de la hipótesis es que $f_i^{-1}(U_j)$ es abierto en Y_i para todo $i \in I$.

Mostremos que $f_j : Y_j \to X$ es un homeomorfismo a su imagen U_j: como U_j es un abierto de X y f_j es inyectiva, tenemos que probar que un subconjunto $V \subseteq X$ contenido en U_j es abierto en X sii $f_j^{-1}(V)$ es abierto en Y_j. La necesidad de esta condición es consecuencia inmediata de la descripción de la topología τ dada en la proposición anterior. Para probar la recíproca, sea $V \subseteq U_j$ tal que $f_j^{-1}(V)$ es abierto en Y_j. Si $i \in I$, por hipótesis tenemos que $f_j^{-1}(U_i)$ es un abierto de Y_j, así que $f_j^{-1}(V \cap U_i) = f_j^{-1}(V) \cap f_j^{-1}(U_i)$ también es abierto en Y_j y su preimagen por el homeomorfismo $f_j^{-1} \circ f_i : f_i^{-1}(U_j) \to f_j^{-1}(U_i)$, es decir, el conjunto $f_i^{-1}(V)$, es abierto en Y_i. De acuerdo a la proposición anterior, esto nos dice que V es un abierto de X. □

{prop:top-3}

1.0.20. Proposición. *Si además de las condiciones de la proposición anterior, tenemos que*

- *para cada $i \in I$ el espacio Y_i es Hausdorff y*
- *para cada $i, j \in I$ el subconjunto*

$$\Delta_{i,j} = \{(a, b) \in Y_i \times Y_j : f_i(a) = f_j(b)\}$$

  es un cerrado de $Y_i \times Y_j$,

entonces X es un espacio Hausdorff.

Demostración. Mostremos que la diagonal $\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ es un cerrado de $X \times X$; en efecto, esta condición es equivalente a la condición de Hausdorff sobre X. Para hacerlo, y como la propiedad de ser cerrado es local[1], bastará que probemos que cualesquiera sean $i, j \in I$ el conjunto $\Delta \cap (U_i \times U_j)$ es un cerrado de $U_i \times U_j$, ya que $\{U_i \times U_j : i, j \in I\}$ es un cubrimiento abierto de $X \times X$.

Sean entonces $i, j \in I$. La función $f_i \times f_j : Y_i \times Y_j \to U_i \times U_j$ es un homeomorfismo, así que $\Delta \cap (U_i \times U_j)$ es un cerrado de $U_i \times U_j$ si su preimagen por $f_i \times f_j$ es un cerrado de $Y_i \times Y_j$, y es inmediato verificar que esta preimagen es precisamente el conjunto $\Delta_{i,j}$ descripto en el enuncia que, por hipótesis, es cerrado. Esto completa la prueba. □

{prop:top-4}

1.0.21. Proposición. *En las condiciones de la Proposición 1.0.19, si existe un conjunto numerable $J \subseteq I$ tal que para cada $j \in I$ la topología de Y_j tiene un base numerable, entonces la topología de X tiene una base numerable.*

Demostración. **Hacer** □

[1]En efecto, si Z es un espacio topológico y $\mathscr{U}$ es un cubrimento abierto de Z, entonces un subconjunto $F \subseteq Z$ es cerrado en Z sii para cada $U \in \mathscr{U}$ la intersección $F \cap U$ es cerrada en U.

B. El teorema de la función inversa

{appendix:calc}

2.0.22. Proposición. *Sean $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos y $f : U \to V$ una función diferenciable. Si $a \in U$ es un punto tal que la diferencial $D_a f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo lineal, entonces existen abierto $U' \subseteq U$ y $V' \subseteq V$ tales que $a \in U'$, $f(a) \in V'$, y la restricción $f : U' \to V'$ es un difeomorfismo. Más aún, para cada punto $y \in V'$ es*

$$D_y(f^{-1}) = \big(D_{f^{-1}(y)} f\big)^{-1}.$$

Demostración. Si la proposición es cierta para la composición $(D_a f)^{-1} \circ f : U \to D_a f(V)$, cuya diferencial en a es id, entonces también es cierta para f. Esto nos permite suponer, sin perder generalidad, que $D_a f = \mathrm{id}$.

Sea $g : x \in U \longmapsto f(x) - x \in \mathbb{R}^n$. Para cada $x \in U$ es $D_x g = D_x f - \mathrm{id}$, así que $D_a g = 0$ y, como g es diferenciable, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|D_x g\| \leq \frac{1}{2}$ si $x \in \bar{B}_\varepsilon(a)$. Como $\det D_a f = 1$, cambiando ε por un número positivo más chico, podemos suponer que $D_x f$ es inversible para todo $x \in B_\varepsilon(a)$.

Si $x, x' \in \bar{B}_\varepsilon(a)$, es entonces

$$\tfrac{1}{2}\|x - x'\| \geq \|g(x) - g(x')\| = \Big\|\big(f(x) - x\big) - \big(f(x') - x'\big)\Big\| \geq \|x - x'\| - \|f(x) - f(x')\|$$

de manera que

$$\|x - x'\| \leq 2\|f(x) - f(x')\|. \tag{41}$$

{eq:B:1}

Sea $V' = \{y \in V : \|y - f(a)\| < \varepsilon/4\}$. Fijemos $y \in V'$. Si $x \in \partial\bar{B}_\varepsilon(a)$, entonces

$$\|y - f(a)\| < \|y - f(x)\|;$$

en efecto, si no fuese éste el caso tendríamos el absurdo de que

$$\tfrac{\varepsilon}{2} \leq \|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - y\| + \|y - f(a)\| \leq 2\|y - f(a)\| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Esto implica que la función $h : x \in \bar{B}_\varepsilon(a) \mapsto \|y - f(x)\|^2 \in \mathbb{R}$, que es diferenciable en el interior de su dominio, no alcanza su mínimo en el borde de éste. Existe entonces $z \in B_\varepsilon(a)$ tal que para todo $u \in \mathbb{R}^n$

$$0 = D_z h(u) = -2\langle D_z f(u), y - f(z)\rangle,$$

y, como $D_z f$ es un isomorfismo, esto nos dice que $y = f(z)$. Más aún, ese punto z es el único de $B_\varepsilon(a)$ con esa propiedad: si $z_1 \in B_\varepsilon(a)$ es otro punto tal que $f(z_1) = y$, usando (41) vemos que $\|z_1 - z\| \leq \|f(z_1) - f(z)\| = 0$. Así, vemos que la restricción $f : B_\varepsilon(a) \to V'$ es una biyección. La desigualdad (41) implica inmediatamente que la función inversa $f^{-1} : V' \to B_\varepsilon(a)$ es continua. Veamos que es de clase C^1.

Sea $y \in V'$ y $x = f^{-1}(y) \in B_\varepsilon(a)$. Como f es de clase C^1 en x, existe una función $r : B_\varepsilon(a) \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x') = f(x) + D_x f(x' - x) + r(x' - x), \qquad \forall x' \in B_\varepsilon(a), \tag{42}$$

{eq:B:2}

y

$$\lim_{x' \to x} \frac{\|r(x'-x)\|}{\|x'-x\|} = 0. \tag{43}$$ {eq:B:3}

Si $y' \in V'$, entonces $x' = f^{-1}(y') \in B_\varepsilon(a)$ y de acuerdo a (42) es

$$y' = y + D_x f(f^{-1}(y') - f^{-1}(y)) + r(f^{-1}(y') - f^{-1}(y)),$$

así que

$$f^{-1}(y') = f^{-1}(y) + (D_x f)^{-1}(y'-y) - (D_x f)^{-1}\big(r(f^{-1}(y') - f^{-1}(y))\big).$$

Para probar que f^{-1} es de diferenciable en y con diferencial

$$D_y f^{-1} = (D_x f)^{-1}, \tag{44}$$ {eq:B:4}

basta mostrar que

$$\lim_{y' \to y} \frac{\|(D_x f)^{-1}\big(r(f^{-1}(y') - f^{-1}(y))\big)\|}{\|y'-y\|} = 0.$$

Esto sigue inmediatamente de que

$$\frac{\|(D_x f)^{-1}\big(r(f^{-1}(y') - f^{-1}(y))\big)\|}{\|y'-y\|} \\ \leq \|(D_x f)^{-1}\| \frac{\|r(f^{-1}(y') - f^{-1}(y))\|}{\|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)\|} \frac{\|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)\|}{\|y'-y\|},$$

de que, como f^{-1} es una función continua y vale (43),

$$\lim_{y' \to y} \frac{\|r(f^{-1}(y') - f^{-1}(y))\|}{\|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)\|} = 0$$

y de que de (41) sabemos que

$$\frac{\|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)\|}{\|y'-y\|} \leq 2.$$

Como vale (44), la diferencial $Df^{-1} : V' \to \mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ de f^{-1} es la composición

$$V' \xrightarrow{f^{-1}} B_\varepsilon(a) \xrightarrow{Df} \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) \xrightarrow{\iota} \mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$$

con $\iota : \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ la inversión. Esto implica que si que f^{-1} es de clase C^k para algún $k \geq 0$, entonces —porque Df e ι son de clase C^∞— podemos deducir que Df^{-1} también es de clase C^k y, en consecuencia, que f^{-1} es de clase C^{k+1}. Como sabemos que f^{-1} es continua, esto prueba inductivamente que de hecho es de clase C^∞, esto es, diferenciable. □

2.0.23. Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ son abiertos y $f : U \times V \to \mathbb{R}^p$ es una función diferenciable, para cada $(x_0, y_0) \in U \times V$ escribimos $D^1_{(x_0,y_0)} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y $D^2_{(x_0,y_0)} f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ a las diferenciales de las funciones $x \in U \mapsto f(x, y_0) \in \mathbb{R}^n$ $y \in V \mapsto f(x_0, y) \in \mathbb{R}^p$ en los puntos x_0 y punto y_0, respectivamente.

{prop:implicit}

Proposición. *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos y sea $f : U \times V \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. Si $(x_0, y_0) \in U \times V$ es tal que $D^2_{(x_0,y_0)} f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo lineal, entonces existen abiertos $U' \subseteq U$ y $V' \subseteq V$ y una función diferenciable $g : U' \to V'$ tales que $x_0 \in U'$, $y_0 \in V'$ y, si $(x, y) \in U' \times V''$,*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) \iff y = g(x). \tag{45}$$

{eq:inv}

Demostración. Sea $F : (x, y) \in U \times V \mapsto (x, f(x, y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, de manera que para cada $(x, y) \in U \times V$ es

$$D_{(x,y)} F = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_n & 0 \\ D^1_{(x,y)} f & D^2_{(x,y)} f \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

La hipótesis sobre $D^2_{(x_0,y_0)} f$ implica que $D_{(x_0,y_0)} F$ es un isomorfismo. La Proposición 2.0.22 nos dice que existe un abierto $B \subseteq U \times V$ y un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tales que $(x_0, y_0) \in B$, $F(x_0, y_0) \in W$ y la restricción $F : B \to W$ es un difeomorfismo. Hay abiertos $U' \subseteq U$ y $V' \subseteq V$ tales que $x_0 \in U'$ y $y_0 \in V'$, y entonces $W' = F(U' \times V')$ es un abierto en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y la restricción $F : U' \times V' \to W'$ también es un difeomorfismo.

En vista de la forma que tiene F, sabemos que la existe una función diferenciable $h : W \to V'$ tal que $F^{-1}(x, y) = (x, h(x, y))$ para cada $(x, y) \in W$. Sea $g : x \in U' \mapsto h(x, f(x_0, y_0)) \in V'$, que claramente es diferenciable. Es inmediato verificar que vale (45). □

2.0.24. Proposición. *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos y sea $f : U \to V$ una función diferenciable tal que para cada $x \in U$ es $\operatorname{rank} D_x f = k$. Para cada $x_0 \in U$ existen abiertos $U' \subseteq U$ y $V' \subseteq V$ tales que $x_0 \in U'$ y $f(x_0) \in V'$, y diffeomorfismos $\phi : U' \to U''$ y $\psi : U' \to U''$ con codominios en abiertos $U'' \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V'' \subseteq \mathbb{R}^m$ tales que $f(U') \subseteq V'$ y conmuta el diagrama*

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & V' \arrow[d, "\psi"] \\ U'' \arrow[r, "\pi"] & V'' \end{tikzcd}$$

en el que π es la restricción de la función $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$.

Demostración. **Hacer** □

Referencias

[Fre64] Peter Freyd, *Abelian categories. An introduction to the theory of functors*, Harper's Series in Modern Mathematics, Harper & Row Publishers, New York, 1964. MR0166240 (29 #3517) ↑

[HH63] André Haefliger and Morris W. Hirsch, *On the existence and classification of differentiable embeddings*, Topology **2** (1963), 129–135. MR0149494 (26 #6981) ↑45

[Mun75] James R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975. MR0464128 (57 #4063) ↑37, 38

[Sko08] Arkadiy B. Skopenkov, *Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces*, Surveys in contemporary mathematics, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 347, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, pp. 248–342. Disponible en `arxiv:0604045`. MR2388495 (2009e:57040) ↑45

[Wal65] C. T. C. Wall, *All* 3*-manifolds imbed in* 5*-space*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 564–567. MR0175139 (30 #5324) ↑45

[Whi36] Hassler Whitney, *Differentiable manifolds*, Ann. of Math. (2) **37** (1936), no. 3, 645–680, DOI 10.2307/1968482. MR1503303 ↑45

[Whi44a] ———, *The singularities of a smooth* n*-manifold in* $(2n-1)$*-space*, Ann. of Math. (2) **45** (1944), 247–293. MR0010275 (5,274a) ↑44

[Whi44b] ———, *The self-intersections of a smooth* n*-manifold in* $2n$*-space*, Ann. of Math. (2) **45** (1944), 220–246. MR0010274 (5,273g) ↑44