Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2012

Práctica 8: Geometría riemanniana

1. Sea ∇ una conexión afín sobre M y sea (U,x) una carta de M.

(a) Hay una única matriz de 1-formas ω_i^j en U, llamadas las *formas de conexión* para esta carta, tal que

$$\nabla_X \frac{\partial}{\partial x^i} = \omega_i^j(X) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

para todo $X \in TM$.

(b) Sean $\{\tau^1, \dots, \tau^n\}$ las 2-*formas de torsión*, definidas por la ecuación

$$\tau(X,Y) = \tau^j(X,Y) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

en la que τ es el tensor de torsión de la conexión ∇. Pruebe las «primeras ecuaciones de estructura de Cartan»,

$$\mathrm{d}\varphi^j = \varphi^i \wedge \omega_i^j + \tau^j.$$

2. Sea (M,g) una variedad riemanniana y sea ∇ una conexión sobre M. La conexión ∇ es compatible con g sii las 1-formas de conexión ω_i^j del ejercicio anterior asociadas a cada carta (U,x) satisfacen

$$g_{jk}\omega_i^k + g_{ik}\omega_j^k = \mathrm{d}g_{ij}.$$

En particular, la matriz ω_i^j de 1-formas de la conexión Riemanniana con respecto a una carta cuyos campos $\frac{\partial}{\partial x^i}$ son ortonormales es antisimétrica.

3. Recordemos que un campo vectorial V es *paralelo* si $\nabla V \equiv 0$, esto es, si $\nabla_X V = 0$ para todo campo X.

(a) Si $p \in \mathbb{R}^n$ y $V_p \in T_p\mathbb{R}^n$, entonces V_p tiene una única extensión a un campo vectorial paralelo sobre $\mathbb{R}^n$.

(b) Sea U un abierto de la esfera S^2 sobre el cual están definidas las coordenadas esféricas (θ, φ) y sea $V = \frac{\partial}{\partial \theta}$. Calcule $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} V$ y $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi}} V$ y concluir que V es paralelo *a lo largo* del ecuador y de todos los meridianos.

(c) Sea $p = (0, \frac{\pi}{2})$ en coordenadas esféricas. Si V es el campo de la parte anterior, entonces V_p no tiene extensión paralela a ninguna vecindad de p.

(d) Usando la primera y la tercera partes de este ejercicio, muestre que ningún entorno de p es isométrico a un abierto de $\mathbb{R}^2$.

4. Sean que $\widetilde{M}$ y M variedades y sea $p : \widetilde{M} \to M$ una submersión sobreyectiva. Para todo $y \in M$ llamamos *fibra de p sobre y*, y escribimos $\widetilde{M}_y$, a $p^{-1}(y) \subset \widetilde{M}$. Verifique, usando el teorema de la función implícita, que las fibras de p son subvariedades emebidas y cerradas de $\widetilde{M}$.

Si $\widetilde{M}$ tiene una métrica Riemanniana $\widetilde{g}$, en cada punto $x \in \widetilde{M}$ el espacio tangente $T\widetilde{M}_x$ se descompone en una suma directa ortogonal

$$T\widetilde{M}_x = H_x \oplus V_x$$

con $V_x := \ker p_*$ el «espacio vertical» y $H_x := V_x^\perp$ el «espacio horizontal.» Si g es una métrica Riemanniana sobre M, decimos que p es una submersión Riemanniana si $\widetilde{g}(X,Y) = g(p_*X, p_*Y)$ para par de de vectores horizonatles X e Y.

(a) Todo campo vectorial W sobre $\widetilde{M}$ puede ser escrito de forma única como $W = W^H + W^V$, con W^H horizontal, W^V vertical y ambos suaves.

(b) Si X es un campo vectorial sobre M, hay un único campo suave horizontal $\widetilde{X}$ sobre $\widetilde{M}$, llamado *levantamiento horizontal* de X, que es p-relacionado a X, esto es, tal que $p_*\widetilde{X}_q = X_{p(q)}$ para todo $q \in \widetilde{M}$.

(c) Sea G un grupo de Lie actuando suavemente sobre $\widetilde{M}$ por isometrías de $\widetilde{g}$ tal que $p \circ \varphi = p$ para todo $\varphi \in G$, y supongamos que G actúa transitivamente en cada fibra $\widetilde{M}_y$. Pruebe que hay una única métrica Riemanniana g sobre M tal que p es una submersión Riemanniana.

5. Sea $p : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \to (M, g)$ una submersión Riemanniana. Un campo vectorial sobre $\widetilde{M}$ es *horizontal* o *vertical* si sus valores están en el subespacio horizontal o vertical en cada punto, respectivamente.

(a) Si X, Y son campos vectoriales sobre M, entonces

(i) $\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y} \rangle = p^*\langle X, Y \rangle$;

(ii) $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^H = \widetilde{[X,Y]}$;

(iii) $[\widetilde{X}, W]$ es vertical si W lo es.

(b) Sean $\widetilde{\nabla}$ y ∇ las conexiones Riemannianas de $\widetilde{g}$ y g. Si X e Y son campos sobre M, entonces

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = \widetilde{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V$$

6. Sea ∇ la conexión Riemanniana de una variedad (M, g) y sean ω_i^j las 1-formas de conexión del ejercicio 1 con respecto a una carta (U, x). Hay una matriz de 2-formas Ω_i^j, llamada la *matrix de curvatura*, tal que

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} R_{kli}^j \, \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^l.$$

Pruebe que Ω_i^j satisface la «segunda ecuación estructural de Cartan»:

$$\Omega_i^j = \mathrm{d}\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j.$$

7. (a) Si $u \in C^\infty(M)$ y X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\nabla^2 u(X,Y) = Y(Xu) - (\nabla_Y X)u.$$

(b) Si η es una 1-forma, escribamos

$$\eta_{i;jk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$$

la expresión local de $\nabla^2\eta$. Pruebe la *identidad de Ricci*:

$$\eta_{i;jk} - \eta_{i;kj} = R_{jki}^l \eta_l.$$

8. Una conexión lineal ∇ sobre una variedad M es *plana* si $R(X,Y)Z \equiv 0$. Muestre que las siguientes afirmaciónes son equivalentes:

(a) La conexión ∇ es plana.
(b) Alrededor de todo punto $p \in M$ hay una carta cuyos campos de vectores coodenados son paralelos.
(c) Si $p, q \in M$, la traslación paralela a lo largo de una curva γ desde p a q depende sólo de la clase de hopotopía de γ.
(d) Todo punto tiene un entorno tal que la translación paralela a lo largo de toda curva cerrada contenida en él es la identidad.

9. Sea (M, g) una variedad Riemanniana orientada con elemento de volumen $\mathrm{d}V$. El *operador de divergencia* $\mathsf{div} : X(M) \to C^\infty(M)$ está definido por

$$\mathrm{d}(\iota_X \,\mathrm{d}V) = (\mathsf{div} X)\,\mathrm{d}V$$

donde ι_X denota la multiplicación interior por X.

(a) Si M compacta, orientada y Riemannniana, entonces para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ vale que

$$\int_M \mathsf{div} X \,\mathrm{d}V = \int_{\partial M} \langle X, N\rangle \,\mathrm{d}\widetilde{V},$$

con N la normal unitaria exterior a ∂M y $\mathrm{d}\widetilde{V}$ el elemento de volumen inducido por la métrica sobre ∂M.

(b) Si $u \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\mathsf{div}(uX) = u\,\mathsf{div} X + \langle \mathsf{grad}\, u, X\rangle,$$

con $\mathsf{grad}\, u$ el campo definido por $\langle \mathsf{grad}\, u, -\rangle = du$. Deduzca de esto la siguiente fórmula de «integración por partes»:

$$\int_M \langle \mathsf{grad}\, u, X\rangle \,\mathrm{d}V = -\int_M u\,\mathsf{div} X \,\mathrm{d}V + \int_{\partial M} u\langle X, N\rangle \,\mathrm{d}\widetilde{V}.$$

10. Si $f \in C^\infty(M)$ es una función diferenciable sobre una variedad Riemannniana orientable M, definimos

$$\Delta f = \mathsf{div}(\mathsf{grad}\, f).$$

(a) En $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual este operador es el Laplaciano usual.

(b) Si M es una variedad Riemanniana orientada compacta sin borde, muestre que si $f \in C^inf ty(M)$ es armónica, esto es, si $\Delta f = 0$, entonces

$$\int_M \|\mathsf{grad}\, f\|^2 dV = 0.$$

Usando esto, concluya que sobre una variedad compacta las únicas funciones armónicas son las localmente constantes.

11. Si G un grupo de Lie con una métrica bi-invariante g, entonces

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[Z,[X,Y]]$$

siempre que X, Y y Z son campos invariantes a izquierda sobre G.

Vectores de Killing

Si g es una forma bilineal sobre una variedad M, la derivada de Lie en la dirección de un campo K es

$$(L_K g)(X,Y) = K(g(X,Y)) - g([K,X],Y) - g(X,[K,Y]).$$

12. Esta expresión es $C^\infty(M)$-lineal en X e Y, y por lo tanto define un tensor $L_K g : \mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to C^\infty(M)$.

13. Si en coordenadas g tiene la expresión $g = g_{ij}\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$, entonces

$$L_K g = K(g_{ij})\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j + g_{ij}\, \mathrm{d}K(x^i) \otimes \mathrm{d}x^j + g_{ij}\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}K(x^j).$$

14. Es $L_K g = 0$ si y sólo si el flujo asociado a K es una isometría con respecto a g.

15. Si ∇ es una conexión sin torsión compatible con g, entonces $L_K g = 0$ si y solamente si para cada par de campos X e Y se tiene

$$g(\nabla_X K, Y) + g(X, \nabla_Y K) = 0$$

Un tal campo vectorial se denomina un *vector de Killing*.

16. Si K y K' son dos vectores de Killing, entonces $[K,K']$ también lo es.

17. Sea K un vector de Killing, sea $f \in C^\infty(M)$ y supongamos que fK también es un vector de Killing.

(a) Si $K_p \neq 0$, entonces $K_p(f) = 0$.
(b) Si $X_p \perp K_p$, entonces $_p(f) = 0$.
(c) Si K es no nulo sobre un abierto denso de M y M es conexa, entonces f es constante.

18. (a) Consideremos un abierto coordenadas en S^2 con coordenadas esféricas θ y ϕ. ¿Es alguno de los campos ∂_θ o ∂_ϕ un campo de Killing?

(b) Adapte la pregunta anterior al toro embebido en $\mathbb{R}^3$ y respóndala.
(c) Encuentre todos los vectores de Killing en $\mathbb{R}^n$ para a métrica usual.

19. Sea M una variedad Riemanniana orientada, K un vector de Killing sobre M y ν la forma de volumen determinada por la orientación y la métrica. Pruebe que $L_K\Omega = 0$ y concluya que K tiene divergencia cero. ¿Esto explica alguna parte del ejercicio anterior?