Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2012
Práctica 7: Variedades Riemannnianas

1. (*a*) Sea la métrica sobre $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ inducida por $\mathbb{R}^3$ y sea (U,x) la carta tal que $x^{-1} : (0,\pi) \times (0,2\pi) \to S^2$ es

$$x^{-1}(\theta,\alpha) = (\sin(\theta)\cos(\alpha), \sec(\theta)\cos(\alpha), \cos(\theta)).$$

Encuentre la expresión local de la métrica g en la carta (U,x) y exprese el elemento de volumen correspondiente en la misma carta, esto es, la 2-forma ω tal que $\omega(p)(v_1,v_2) = \pm 1$ si $\{v_1,v_2\}$ es base ortonormal de S^2_p).

(*b*) Sea $\mathbb{R}^2_+ := \{(x,y) : y > 0\}$ metrizado con respecto a la carta usual $(\mathbb{R}^2_+, \mathrm{id})$ con la métrica $g = \frac{1}{y^2} dx \otimes dx + \frac{1}{y^2} dy \otimes dy$. Exprese la conexión de Levi-Civita en la carta usual.

(*c*) Calcule la conexión de Levi-Civita para la métrica de Lorentz en $\mathbb{R}^{n+1}$ dada, con respecto a la carta usual, por $g_{ii} = 1$ si $1 \leq i \leq n$ y $g_{n+1,n+1} = -1$. Muestre que el teorema de Levi-civita se puede extender a métricas pseudo-Riemannianas.

2. Sea G un grupo que actúa sobre una variedad M de manera propiamente discontinua y sea g una métrica sobre M.

(*a*) De una definicion razonable para el concepto de *métrica G-invariante*.

(*b*) Si g es G-invariante, entonces la variedad M/G hereda una métrica de M, esto es, tiene una métrica con la que la proyección $M \to M/G$ es un morfismo de variedades de Riemann.

(*c*) Si G es finito, $\overline{g} = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{h \in G} h^*(g)$ es una métrica invariante invariante sobre M.

(*d*) ¿Qué sucede si en el punto anterior se tiene una métrica de tipo (r,s)?

3. El espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$ hereda una métrica de S^n.

4. Escriba la ecuación de las geodésica en términos de los símbolos de Christoffel. Muestre que las geodésicas en $\mathbb{R}^n$ son las rectas, y que las geodésicas en el semiplano de Poincaré son o bien rectas verticales, o bien semicírculos con centro en el eje x.

5. Si (U,x) es una carta de una variedad M, entonces la asignación

$$(X, \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}) \mapsto \sum_i X(\alpha_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

define una conexión sobre U.

6. Sea ∇ una conexión sobre una variedad M y sea $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ su torsión. Muestre que T es $C^\infty(M)$-bilineal y que, por lo tanto, define un tensor de tipo $(1,2)$.

7. (*a*) Una combinación lineal $\sum\limits_i \alpha_i \nabla_i$ de conexiones con $\sum\limits_i \alpha_i = 1$ es una conexión.

(b) La diferencia entre dos conexiones es un tensor.

8. Si ∇ es una conexión con torsión T, entonces $\nabla - \frac{1}{2}T$ es una conexión simétrica. Encuentre sus símbolos de Christoffel en función de los de ∇.

9. Sea M una subvariedad de codimensión 1 de $\mathbb{R}^{n.}$. Sea g la métrica canónica en $\mathbb{R}^n$, sea g_M la métrica pull-back de g y sea ∇ la conexión asociada a g_M. Muestre que, si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, el campo $\nabla_X Y$ coincide con la proyección ortogonal sobre TM de la derivada de $i_*(Y)$ en la dirección de $i_*(X)$, donde $i : M \to \mathbb{R}^n$ es la inclusión.

10. Sea M una variedad de dimensión n y sea ∇ una conexión sobre M. Si $c : I \to M$ es una curva diferenciable, $t_0 \in I$ y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es una base de $M_{c(t_0)}$, sea $X_c^{\|}$ el conjunto de los campos paralelos a lo largo de c y sean $X_1, \ldots, X_n \in X_c^{\|}$ tales que $X_i(t_0) = v_i$.

(a) El conjunto $X_c^{\|}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de manera natural.

(b) Para todo $t \in I$, los vectores $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ son elementos linealmente independientes en $M_{c(t)}$.

(c) Determine la dimensión de $X_c^{\|}$.