Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2012

Práctica 5: Integrales

1. Consideremos un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r, "j'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con filas exactas.

(a) Muestre que $i(\ker\alpha) \subseteq \ker\beta$ y $j(\ker\beta) \subseteq \ker\gamma$, que hay funciones bien definidas $\tilde{i'} : A'/\alpha(A) \to B'/\beta(B)$ y $\tilde{j'} : B'/\beta(B) \to C'/\gamma(C)$ tales que

$$\tilde{i'}(a' + \alpha(A)) = i'(a') + \beta(B),$$
$$\tilde{j'}(b' + \beta(B)) = j'(b') + \gamma(C),$$

y que hay sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \ker\alpha \xrightarrow{i|_{\ker\alpha}} \ker\beta \xrightarrow{j|_{\ker\beta}} \ker\gamma$$

$$A'/\alpha(A) \xrightarrow{\tilde{i'}} B'/\beta(B) \xrightarrow{\tilde{j'}} C'/\gamma(C) \longrightarrow 0$$

(b) Prueba el Lema de la Serpiente en detalle.

2. Si $C = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C_n$ es un espacio vectorial graduado de dimensión total finita, la *característica de Euler de C* es

$$\chi(C) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \dim C_n.$$

(a) Si C es un complejo, de manera que para cada $n \in \mathbb{Z}$ tenemos una función linea $d_n : C_n \to C_{n+1}$ y es $d_{n+1} \circ d_n = 0$ para todo n, podemos construir otro espacio vectorial graduado $H(C) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n(C)$, con componentes homogéneas $H^n(C) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n-1}$. Muestre que $\chi(C) = \chi(H(C))$.

(b) Si C es exacto, entonces $\chi(C) = 0$.

(c) Si

$$0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos de espacios vectoriales graduados de dimensión total finita, entonces

$$\chi(C) = \chi(C') + \chi(C'').$$

3. Si M es una variedad tal que $\dim \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n(M) < \infty$, la *característica de Euler de M* es

$$\chi(M) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \dim H^n(M).$$

(a) Si $M = U \cup V$ con U y V dos abiertos de M, entonces

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

(b) Determine la característica de Euler de las esferas, del cilindro $S^1 \times (0,1)$, de la banda de Moebius, de la botella de Klein, de $\mathbb{R}^n \setminus V$ con V un subespacio lineal de $\mathbb{R}^n$.

(c) Muestre que el toro tiene característica nula, y que la característica de una esfera a la que se le agregan g manijas es $2 - 2g$.

4. Muestre que, como variedades diferenciables, $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) \cong \mathsf{O}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ y $\mathsf{SL}(n,\mathbb{R}) \cong \mathsf{SO}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2-1}$. Concluya que

$$H^\bullet(\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})) \cong H^\bullet(\mathsf{O}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}),$$
$$H^\bullet(\mathsf{SL}(n,\mathbb{R})) \cong H^\bullet(\mathsf{SO}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2-1}).$$

Calcule, en particular, $H^\bullet(\mathsf{SL}(2,\mathbb{R}))$.

5. Sea M una variedad, $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo tangente a M y $\mathscr{L}_X : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ la derivada de Lie de formas. Muestre que $d \circ \mathscr{L}_X = \mathscr{L}_X \circ d$, de manera que $\mathscr{L}_X$ induce un endomorfismo bien definido en la cohomología de de Rham $H^\bullet(M)$. Pruebe que, de hecho, ese endomorfismo es nulo.

6. Sea G un grupo de Lie y sea $\exp : \mathfrak{g} \to G$ la aplicación exponencial. Decimos que una forma $\omega \in \Omega^k(G)$ es *invariante a izquierda* si para todo $g \in G$ es $(L_g)_*(\omega) = \omega$.

(a) La imagen de exp contiene un entorno abierto de $e \in G$, y genera un subgrupo abierto, cerrado y conexo de G.

(b) Sea $v \in T_eG$, sea $g = \exp(v)$, sea $X \in \mathfrak{X}(G)$ el campo invariante a izquierda tal que $X_e = v$ y sea $\phi : \mathbb{R} \times G \to G$ el flujo correspondiente a X. Muestre que

$$L_{\exp(tv)} = \phi_t$$

para cada $t \in \mathbb{R}$ y, en particular, $L_g = \phi_1$.

(c) Si $g \in G$, la translación a izquierda $L_g : G \to G$ induce un isomorfismo lineal $(L_g)_* : H^\bullet(M) \to H^\bullet(M)$. Si g está en la componente conexa de la identidad en G, entonces este morfismo $(L_g)_*$ es, de hecho, la identidad.