Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2012

Práctica 5: Integrales

1. Sea M una variedad y sean U y V dos abiertos de M tales que $M = U \cup V$, y pongamos $W = U \cap V$. Muestre que toda función $f \in C^\infty(W)$ puede escribirse en la forma $f_1|_W + f_2|_W$ con $f_1 \in C^\infty(U)$ y $f_2 \in C^\infty(V)$ y, dando un contraejemplo, que no toda función de $C^\infty(W)$ es la restricción a W de una de $C^\infty(U)$.

Solución. Sean χ_1, $\chi_2 : M \to \mathbb{R}$ funciones tales que $\{\chi_1, \chi_2\}$ es una partición de la unidad subordinada a $\{U, V\}$, con $\operatorname{sop}\chi_1 \subseteq U$ y $\operatorname{sop}\chi_2 \subseteq V$. Sea $f \in C^\infty(W)$ y consideremos la función $f_1 : U \to \mathbb{R}$ tal que si $x \in U$ es

$$f_1(x) = \begin{cases} \chi_2(x)f(x), & \text{si } x \in W; \\ 0, & \text{si } x \in U \setminus \operatorname{sop}\chi_1. \end{cases}$$

Notemos que esto tiene sentido, porque si $x \in W \cap (U \setminus \operatorname{sop}\chi_1)$, entonces $\chi_2(x) = 0$, y que se trata de una función de $C^\infty(U)$: en efecto, el conjunto $\{X, U \setminus \operatorname{sop}\chi_2\}$ es un cubrimiento abierto de U porque $\operatorname{sop}\chi_2 \subseteq C$. De la misma forma, hay una función $f_2 \in C^\infty(V)$ tal que

$$f_2(x) = \begin{cases} \chi_1(x)f(x), & \text{si } x \in W; \\ 0, & \text{si } x \in V \setminus \operatorname{sop}\chi_2. \end{cases}$$

Finalmente, es $f_1|_W + f_2|_W = \chi_2 f + \chi_2 f = f$. Esto prueba la primera parte.

Sea por otro lado $M = \mathbb{R}$, $U = (-\infty, 1)$, $V = (-1, \infty)$ y $f : W = U \cap V = (-1, 1) \to \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = (x^2 - 1)^{-1}$ para cada $x \in (-1, 1)$. Es claro que $f \in C^\infty(W)$ pero no existe $g \in C^\infty(U)$ tal que $g|_W = f$: en efecto, f no es acotada en ningún intervalo de la forma $(1-\varepsilon, 1)$ con $\varepsilon \in (0, 1)$ mientras que g es necesariamente acotada en $(-1/2, 1/2)$. □

2. Si $f : M \to N$ es una función diferenciable entre variedades, los pull-backs $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ son tales que

$$f^*(\omega_1 + \omega_1) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2),$$
$$f^*(h \cdot \omega_1) = h \circ f \cdot f^*(\omega_1)$$

y

$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(\omega_1) \wedge f^*(\omega_2)$$

para cada ω_1, $\omega_2 \in \Omega^\bullet(N)$ y $h \in C^\infty(N)$.

3. Si U y V son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to V$ es diferenciable, entonces

$$f^*(\mathrm{d}x_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \mathrm{d}x_k$$

y

$$f^*(g \cdot \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n) = g \circ f \cdot \det\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)_{i,j} \cdot \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y cada $g \in C^\infty(V)$.

4. Sea M una variedad de dimensión n y sean ω_1, $\omega_2 \in \Omega^n(M)$ dos n-formas sobre M que no se anulan en ningún punto.

(a) Para cada $\omega \in \Omega^n(M)$ existe una única función $f \in C^\infty(M)$ tal que $\omega = f \cdot \omega_1$.

(b) Las formas ω_1 y ω_2 inducen la misma orientación de M si y solo si la función $f \in C^\infty(M)$ tal que $\omega_1 = f \cdot \omega_2$ es positiva.

Solución. (a) Sean ω_1, $\omega \in \Omega^n(M)$ y supongamos que ω_1 no se anula en ningún punto de M. Para cada $x \in M$ el espacio vectorial $\Lambda^n(T_x^*M)$ tiene dimensión 1 y $\omega_1(x)$ es un elemento no nulo en él, así que existe $f(x) \in \mathbb{R}$ tal que $\omega(x) = f(x) \cdot \omega_1(x)$. Esto define una función $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $\omega = f \cdot \omega_1$. Para terminar, bastará que mostremos que f es diferenciable.

Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M. Las funcionnes $h_1 : x \in U \mapsto \omega_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \in \mathbb{R}$ y $h : x \in U \mapsto \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \in \mathbb{R}$ son diferenciables, porque ω_1 y ω son formas diferenciables, y como ω_1 no se anula, h_1 no se anula en U. De la definición de f sigue inmediatamente que $h(x) = f(x)h_1(x)$ para cada $x \in U$, así que $f|_U = h/h_1$: esto implica, claramente, que $f|_U \in C^\infty(U)$ y, como ϕ es cualquier carta, que $f \in C^\infty(M)$, como queríamos.

(b) Usando la primera parte de este ejercicio, vemos que existe una función $f \in C^\infty(M)$ tal que $\omega_2 = f \cdot \omega_1$; en particular, como ω_2 es una forma de volumen, la función f no se anula. Si $x \in M$, es claro que

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff \text{para cada base ordenada } (v_1, \dots, v_n) \text{ de } T_xM \text{ es} \\ &\qquad \omega_1(x)(v_1, \dots, v_n)\omega_2(x)(v_1, \dots, v_n) > 0 \\ &\iff \omega_1 \text{ y } \omega_2 \text{ determinan la misma orientación de } T_xM, \end{aligned}$$

y entonces es claro que ω_1 y ω_2 determinan la misma orientación de M sii $f > 0$. □

5. Si M es una variedad y $\omega \in \Omega^k(M)$, ¿es $\omega \wedge \omega = 0$? ¿Y si $\dim M = 3$?

Solución. Supongamos que $M = \mathbb{R}^n$ con $n \geq 4$, y sea $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4 \in \Omega^2(M)$. Entonces $\omega \wedge \omega = 2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$ porque $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = 0$, $\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4 = 0$, y $\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$, y entonces vemos que $\omega \wedge \omega \neq 0$.

Por otro lado, si M es una variedad cualquiera y $\omega \in \Omega^{2k+1}(M)$ con $2(2k+1) \leq \dim M$, entonces es $\omega \wedge \omega = 0$, como se ve calculando directamente en coordenadas.

En particular, si $\dim M = 3$ y $\omega \in \Omega^k(M)$ con $k \geq 1$, entonces o bien $k = 1$ y en ese caso $\omega \wedge \omega = 0$ por lo anterior, o bien $k \geq 2$ y en ese caso $\omega \wedge \omega \in \Omega^{2k}(M) = 0$, porque es $2k > \dim M$. □

6. Si M es una variedad y $f : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, hay una función $\mathrm{d}f : M \to T^*M$ tal que $\mathrm{d}f(x) \in T_x^*M$ y $\mathrm{d}f(x)(X) = X_x f$ para cada $x \in M$ y cada $X \in T_xM$. Muestre que $\mathrm{d}f$ es una función diferenciable.

Solución. Sea $x \in M$ y sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M tal que $x \in U$. Entonces en el atlas que usamos para definir la estructura diferenciable de T^*M hay una carta $\tilde{\phi} : T^*U \to \mathbb{R}^{2n}$ tal que $\tilde{\phi}(\lambda) = (\phi(x), \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ si $x \in U$ y $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \,\mathrm{d}x_i \in T_x^*U$; sabemos, además, que la imagen de $\tilde{\phi}$ es $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$.

Es claro que $\mathrm{d}f(U) \subseteq T^*(U)$, así que para ver que $\mathrm{d}f$ es diferenciable sobre U basta mostrar que la composición $\tilde{\phi} \circ \mathrm{d}f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \phi(U) \times \mathbb{R}^n$ es diferenciable. A su vez, hacer esto probará que $\mathrm{d}f : M \to T^*M$ es diferenciable. Calculando, vemos que esa composición función es la función

$$y \in \phi(U) \longmapsto \Big(y, \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\Big|_{\phi(y)} f, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\Big|_{\phi(y)} f\Big) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Como las definiciones nos dicen que

$$\Big(y, \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\Big|_{\phi(y)} f, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\Big|_{\phi(y)} f\Big) = \Big(y, \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_1}\Big|_y, \dots, \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_n}\Big|_y\Big),$$

es claro que la función (1) es diferenciable, porque f lo es. □

7. Si M es una variedad, $f, g \in C^\infty(M)$ y $\omega \in \Omega^1(M)$, entonces $f\omega \in \Omega^1(M)$ y $\mathrm{d}(fg) = g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g$.

Solución. Es claro que $f\omega$ asigna a cada punto $x \in M$ un elemento de T_x^*M, a saber, $f(x)\omega(x)$, así que para ver que $f\omega \in \Omega^1(M)$ tenemos que mostrar que esta asignación de diferenciable. Para eso, notemos que si $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $(f\omega)(X) = f\omega(X)$ es una función de $C^\infty(M)$, ya que f y $\omega(X)$ lo son: esto implica que $f\omega$ es diferenciable.

Sea ahora $x \in M$ y $X \in T_xM$. Por un lado, tenemos que

$$\mathrm{d}(fg)(X) = X(fg) = f(x)X(g) + g(x)X(g),$$

porque X es una verivación, y, por otro, es

$$\begin{aligned}(g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g)(X) &= (g\,\mathrm{d}f)(X) + (f\,\mathrm{d}g)(X) = g(x)\,\mathrm{d}f(X) + f(x)\,\mathrm{d}g(X)\\ &= g(X)X(f) + f(x)X(g).\end{aligned}$$

Esto muestra que las 1-formas $\mathrm{d}(fg)$ y $g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g$ toman el mismo valor en el vector X. La arbitrariedad de $x \in M$ y de $X \in T_xM$ implican entonces que $\mathrm{d}(fg) = g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g$, como queremos. □

8. Sea M una variedad.

(a) Sea $x \in M$. Si $v \in T_xM$ y $\lambda \in T_x^*M$, entonces existen $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \Omega^1(M)$ tales que $X_x = v$ y $\omega_x = \lambda$.

(b) Sean U un abierto, $X \in \mathfrak{X}(U)$ y $\omega \in \Omega^1(U)$. Si $x \in U$, existen un abierto $V \subseteq U$, un campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ y una forma $\tilde{\omega} \in \Omega^1(M)$ tales que $x \in V$, $\tilde{X}|_V = X|_V$ y $\tilde{\omega}|_V = \omega|_V$. ¿Puede tomarse siempre $V = U$?

Solución. (a) Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M tal que $x \in U$, y sea $\chi : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que existe un $\operatorname{sop}\chi \subseteq U$ y existe un abierto $V \subseteq M$ tal que $x \in V \subseteq U$ y $\chi|_V \equiv 1$. Existen $v_1, \dots, v_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\big|_x$ y $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i\,\mathrm{d}x_i\big|_x$.

Podemos definir entonces $\tilde{X} = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(U)$ y $\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^n \lambda_i\,\mathrm{d}x_i \in \Omega^1(U)$ sobre U, y considerar el campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y la 1-forma $\omega \in \Omega^1(M)$ tales que

$$X_x = \begin{cases} \chi(x)\tilde{X}_x, & \text{si } x \in U; \\ 0, & \text{si } x \in M \setminus \operatorname{sop}\chi; \end{cases} \qquad \omega_x = \begin{cases} \chi(x)\tilde{\omega}_x, & \text{si } x \in U; \\ 0, & \text{si } x \in M \setminus \operatorname{sop}\chi. \end{cases}$$

Como χ se anula sobre $U \cap (M \setminus \operatorname{sop}\chi)$, X y ω están bien definidos, y son diferenciables porque sus restricciones a U y a $M \setminus \operatorname{sop}\chi$ lo son y $\{U, M \setminus \operatorname{sop}\chi\}$ es un cubrimiento abierto de M. La elección de χ y de $\tilde{X}$ y $\tilde{\omega}$ hace inmediato que $X_x = v$ y $\omega_x = \lambda$.

(b) Sea $U \subseteq M$ un abierto, $X \in \mathfrak{X}(U)$ y $\omega \in \Omega^1(U)$, y fijemos $x \in U$. Sabemos que existe una función $\chi \in C^\infty(M)$ y un abierto $V \subseteq U$ tal que $x \in V$, $\chi|_V \equiv 1$ y $\operatorname{sop}\chi \subseteq U$. Sean $\tilde{X}$ y $\tilde{\omega}$ tales que para cada $y \in M$

$$\tilde{X}_y = \begin{cases} \chi(y)X_y, & \text{si } u \in U; \\ 0, & \text{si } u \in M \setminus \operatorname{sop}\chi; \end{cases} \qquad \tilde{\omega}_y = \begin{cases} \chi(y)\omega_y, & \text{si } u \in U; \\ 0, & \text{si } u \in M \setminus \operatorname{sop}\chi. \end{cases}$$

Estas dos definiciones tienen sentido, porque $\chi(y) = 0$ si $y \in U \cap (M \setminus \chi)$, y es claro que $\tilde{X}$ y $\tilde{\omega}$ son diferenciables sobre los abiertos del cubrimiento abierto $\{U, M \setminus \chi\}$ de M, así que se trata de elementos de $\mathfrak{X}(M)$ y de $\Omega^1(M)$, respectivamente. Es claro, de la elección de χ, que $\tilde{X}|_V = X|_V$ y $\tilde{\omega}|_V = \omega|_V$.

Finalmente, veamos que no es posible en general tomar $V = U$. Sea $M = \mathbb{R}$ con su carta global usual, sea $U = (-1, 1)$ y consideremos el campo $X = (x^2 - 1)^{-1}\frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(U)$. Supongamos que existe un campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ tal que $\tilde{X}|_U = X$. La función $f(x) = x$ es un elemento de $C^\infty(\mathbb{R})$, así que $\tilde{X}f \in C^\infty(M)$. En particular, la restricción $(\tilde{X}f)|_U$ es acotada; pero $(\tilde{X}f)|_U = Xf = (x^2 - 1)^{-1}$, que no es acotada. $\square$

9. Sea M una variedad y sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo sobre M. Si $k \geq 1$, podemos considerar la función $i_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ tal que

$$(i_X\omega)(x)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \omega(X_x, v_1, \ldots, v_{k-1})$$

para cada $x \in M$ y $v_1, \ldots, v_{k-1} \in T_xM$. Por simplicidad, definimos tambien $i_X = 0 : \Omega^0 \to \Omega^{-1}(X)$. Muestre que $i_X : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ es una derivación y encuentre expresiones en coordenadas locales para i_X.

10. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial.

(a) Si para cada $x \in \mathbb{R}^3$ y cada $v \in \mathbb{R}^3$ definimos $\omega_F^1(x)(v) = \langle F(x), v\rangle$, obtenemos una forma $\omega_F^1 \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. Encuentre sus coeficientes con respecto a la base $\{dx, dy, dz\}$. Recíprocamente, dada una forma $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, existe un único campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\omega_F^1 = \omega$.

(b) Si para cada $x \in \mathbb{R}^3$ y cada $u, v \in \mathbb{R}^3$ ponemos $\omega_F^2 = \langle F(x), u \times v\rangle$ obtenemos una forma $\omega_F^2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Determine sus coeficientes con respecto a la base $\{dy \wedge dz, dx \wedge dz, dx \wedge dy\}$ de $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Recíprocamente, dada una forma $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ existe un único campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\omega_F^2 = \omega$.

(c) Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ y $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo. Establezca y pruebe una relación entre ∇f y df, entre $\operatorname{rot} F$ y $d\omega_F^1$ y entre $\operatorname{div} F$ y $d\omega_F^2$.

11. Sea M una variedad. Decimos que una forma $\omega \in \Omega^k(M)$ es *cerrada* si $d\omega = 0$ y que es *exacta* si existe una forma $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $d\eta = \omega$.

(a) Una forma exacta es cerrada.

(b) Si ω y ω' son formas cerradas y ω'' es exacta, entonces $\omega \wedge \omega'$ es cerrada y $\omega \wedge \omega''$ es exacta.

(*c*) Si $f : M \to N$ es una función diferenciable entre variedades y $\omega \in \Omega^\bullet(N)$ es una forma cerrada (exacta), entonces $f^*(\omega)$ es cerrada (exacta).

Solución. (*a*) Si ω es una forma exacta, existe η tal que $\mathrm{d}\eta = \omega$, y entonces $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\,\mathrm{d}\eta = 0$: esto nos dice que ω es cerrada.

(*b*) Supongamos que ω y ω' son formas cerradas y que $\omega'' = \mathrm{d}\eta$ es una forma exacta; sea, además, p el grado de ω. Entonces

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \omega') = \mathrm{d}\omega \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}\omega' = 0,$$

porque $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega' = 0$, así que $\omega \wedge \omega'$ es una forma cerrada, y, por otro lado,

$$\mathrm{d}((-1)^p \omega \wedge \eta) = (-1)^p\, \mathrm{d}\omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathrm{d}\eta = \omega \wedge \omega''$$

ya que $\mathrm{d}\omega = 0$: esto nos dice que $\omega \wedge \omega''$ es exacta.

12. *Derivada de Lie.* Sean M una variedad y $X \in \mathfrak{X}(M)$ Entonces la derivada de Lie $\mathscr{L}_X : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ es una función $\mathbb{R}$-lineal de grado 0 tal que

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathscr{L}_X(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathscr{L}_X(\eta),\\
&\mathscr{L}_X(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}\mathscr{L}_X(\omega),\\
&\mathscr{L}_X(f) = X(f)
\end{aligned}$$

para cada $\omega, \eta \in \Omega^1(M)$ y cada $f \in C^\infty(M)$. Muestre que estas condiciones determinan a $\mathscr{L}_X$ de manera únívoca, encontrando la expresión en coordenadas para $\mathscr{L}_X$.

Solución. Supongamos primero que $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ y que $U \subseteq M$ es un abierto tal que $\omega|_U = 0$. Si $x \in U$, entonces existen una función $\chi : M \to \mathbb{R}$ y un abierto V tales que $x \in V \subseteq U$, $\chi|_V \equiv 0$ y $\chi|_{M\setminus U} \equiv 1$. Es $\mathscr{L}_X(\chi\omega)(x) = X_x(\chi)\omega(x) + \chi(x)\mathscr{L}_X(\omega)(x) = 0$, porque $X_x\chi = 0$ porque χ es localmente constante en x y porque $\chi(x) = 0$: esto nos dice que $\mathscr{L}_X(\omega)|_U = 0$. Hemos probado que si $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ y $U \subseteq M$ es un abierto es

$$\omega|_U = 0 \implies (\mathscr{L}_X\omega)|_U = 0,$$

y de esto sigue inmediatamente que si $\omega, \eta \in \Omega^\bullet(M)$ y $U \subseteq M$ es un abierto entonces

$$\omega|_U = \eta|_U \implies (\mathscr{L}_X\omega)|_U = (\mathscr{L}_X\eta)|_U.$$

Consideremos una p-forma $\omega \in \Omega^p(M)$ y fijemos una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$. Entonces existen funciones $a_{i_1,\dots,i_p} \in C^\infty(U)$ para cada elección de índices tales que $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$ para las que

$$\omega|_U = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} a_{i_1,\dots,i_p}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}.$$

Sea $x \in U$. Existe un abierto V y funciones $\tilde a_{i_1,\dots,i_p}, \tilde x_1, \dots, \tilde x_n \in C^\infty(M)$ tales que $x \in V \subseteq U$, $\tilde a_{i_1,\dots,i_p}|_V = a_{i_1,\dots,i_p}|_V$ para cada elección de indices $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$ y $\tilde x_i = x_i$ sobre V para cada $i \in \{1,\dots,n\}$. Podemos considerar la p-forma $\omega' \in \Omega^p(M)$

$$\omega' = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} \tilde a_{i_1,\dots,i_p}\, \mathrm{d}\tilde x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\tilde x_{i_p}.$$

Usando las propiedades del enunciado, vemos que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X(\omega') = &\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} X(\tilde a_{i_1,\dots,i_p})\,\mathrm{d}\tilde x_{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}\tilde x_{i_p}\\ &+\sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_p\le n\\ 1\le j\le p}} \tilde a_{i_1,\dots,i_p}\,\mathrm{d}\tilde x_{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}(X\tilde x_{i_j})\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}\tilde x_{i_p}\end{aligned}$$

Como $\omega'|_V = \omega|_V$, es $\mathscr{L}_X(\omega)|_V = \mathscr{L}_X(\omega')|_V$. Esto nos dice que para cada $y \in V$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X(\omega)(y) = &\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} X_y(a_{i_1,\dots,i_p})\,\mathrm{d}x_{i_1}\big|_y\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_p}\big|_y\\ &+\sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_p\le n\\ 1\le j\le p}} a_{i_1,\dots,i_p}(y)\,\mathrm{d}x_{i_1}\big|_y\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}(Xx_{i_j})\big|_y\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_p}\big|_y\end{aligned}$$

Como esto vale cualquiera sea $x \in U$, concluímos así que es

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X(\omega)|_U = &\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} X(a_{i_1,\dots,i_p})\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_p}\\ &+\sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_p\le n\\ 1\le j\le p}} a_{i_1,\dots,i_p}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}(Xx_{i_j})\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_p}\end{aligned}$$

sobre *todo* U. El miembro derecho de esta igualdad depende solamente de ω, de X y de la carta: esto prueba que si existe una función $\mathscr{L}_X$ con las propiedades del enunciado, es única. Para probar la existencia, además, bastará que probemos que el miembro derecho de esta igualdad no depende de la carta ϕ elegida.

Terminar.

13. Si M es una variedad y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ son campos sobre M, entonces

$$\begin{aligned}&i_X i_Y = -i_Y i_X,\\ &i_{fX} = f\, i_X,\\ &i_X\,\mathrm{d} + \mathrm{d}i_X = \mathscr{L}_X,\\ &\mathscr{L}_{fX} = f\,\mathscr{L}_X + \mathrm{d}f \wedge i_X,\\ &\mathscr{L}_X i_Y - i_Y \mathscr{L}_X = i_{[X,Y]}.\end{aligned}$$