GEOMETRÍA DIFERENCIAL
Primer Cuatrimestre — 2012

Práctica 4: Orientabilidad

1. Muestre que el plano proyectivo y la banda de Moebius no son orientables.

2. Una variedad que posee un atlas con exactamente dos cartas cuyos dominios se intersecan en un conexo es orientable. ¿Puede relajar alguna de estas hipótesis manteniendo la conclusión?

3. Enuncie y pruebe en detalle las caracterizaciones equivalentes de la orientabilidad de una variedad en término de

- orientaciones coherentes de los espacios tangentes;
- atlas con funciones de transición positivamente compatibles;
- existencia de formas de volumen

4. Si M es una variedad de dimensión dos que tiene un atlas tal que todas las funciones de transición correspondientes son funciones holomorfas, entonces M es orientable.

5. Si M es una variedad, entonces las variedades TM y T^*M son orientables.

6. Una variedad paralelizable es orientable. En particular, un grupo de Lie es orientable.

7. Si M y N son variedades no vacías, entonces $M \times N$ es orientable sii M y N lo son.

8. Sea M una variedad, sea $\tilde{M}$ el conjunto de pares (x, o) con $x \in M$ y o una orientación de T_xM y sea $p : \tilde{M} \to M$ la función tal que $p(x, o) = x$ para todo $(x, o) \in \tilde{M}$.

(a) Muestre que $\tilde{M}$ es, de manera natural, una variedad. Con respecto a esa estructura, la función $p : \tilde{M} \to M$ es un revestimiento diferenciable de dos hojas.

(b) La variedad $\tilde{M}$ es orientable.

(c) La variedad M es orientable si y solamente si existe una función diferenciable $s : M \to \tilde{M}$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_M$.

(d) Una variedad simplemente conexa es orientable.

(e) Una variedad cuyo grupo fundamental no contiene subgrupos de índice 2 es orientable.