Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2012
Práctica 4: Orientabilidad

1. Muestre que el plano proyectivo y la banda de Moebius no son orientables.

Solución. Sea $f : S^2 \to P^2$ la función tal que $f(x,y,z) = (x : y : z)$ para cada $(x,y,z) \in S^2$.

Sean $N = (0,0,1)$ y $S = (0,0,-1)$, $U_N = S^2 \setminus \{N\}$, $U_S = S^2 \setminus \{S\}$, y

$$\phi_N : (x,y,z) \in U_N \mapsto \frac{(x,y)}{1-z} \in \mathbb{R}^2, \qquad \phi_S : (x,y,z) \in U_S \mapsto \frac{(x,y)}{1+z} \in \mathbb{R}^2,$$

que tienen inversas

$$\phi_N^{-1} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+1}(2x, 2y, x^2+y^2-1) \in U_N,$$
$$\phi_S^{-1} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+1}(2x, 2y, -x^2-y^2+1) \in U_S.$$

Entonces $\mathscr{A} = \{\phi_N, \phi_S\}$ es una carta de S^2. Por otro lado, si para cada $i \in \{0,1,2,\}$ es $V_i = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in P^2 : x_i \neq 0\}$ y definimos funciones $\psi_i : V_i \to \mathbb{R}^2$ poniendo

$$\psi_0(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1/x_0, x_2/x_0),$$
$$\psi_1(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0/x_1, x_2/x_1),$$
$$\psi_2(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0/x_2, x_1/x_2),$$

entonces $\mathscr{A}' = \{\psi_0, \psi_1, \psi_2\}$ es un atlas de P^2.

Para ver que f es diferenciable tenemos que mostrar que las composiciones $\psi_i \circ f \circ \phi_j$ con $i \in \{0,1,2\}$ y $j \in \{S,N\}$ son diferenciables en sus dominios. Por ejemplo, tomemos $i = 0$ y $j = N$: el dominio de $\psi_0 \circ f \circ \phi_N$ es $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ y allí es

$$(\psi_0 \circ f \circ \phi_N)(x,y) = (y/x, (x^2+y^2-1)/x); \tag{1}$$

las otras cinco composiciones son del mismo tipo.

Completando la cuentas que faltan, vemos que $f : S^2 \to P^2$ es una función diferenciable. Veamos que, de hecho, es una inmersión. Para ello, alcanza con mostrar que todas las composiciones $\psi_i \circ f \circ \phi_j$ con $i \in \{0,1,2\}$ y $j \in \{S,N\}$ tienen matriz jacobiana inversible. Por ejemplo, la matriz jacobiana de la función $\psi_0 \circ f \circ \phi_N$ que calculamos en (1) es

$$\begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 2 - \frac{x^2+y^2-1}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{pmatrix}$$

que tiene determinante $-(x^2+y^2+1)/x^3$, que no se anula en su dominio.

Supongamos ahora que el plano proyectivo P^2 es orientable, fijemos una orientación o sobre él, sea $o_!$ la orientación opuesta, y sea o' una orientación cualquiera sobre S^2. Sea $A \subseteq S^2$ el conjunto de puntos $x \in S^2$ tales que la función $f_{*x} : T_x S^2 \to T_{f(x)} P^2$ manda la orientación $o'(x)$ de $T_x S^2$ en la orientación $o(f(x))$ de $T_{f(x)} P^2$ y sea B su complemento, que es precisamente el conjunto de puntos $x \in S^2$ tales que la función $f_{*x} : T_x S^2 \to T_{f(x)} P^2$ manda la orientación $o'(x)$ de $T_x S^2$ en la orientación $o_!(f(x))$ de $T_{f(x)} P^2$.

Afirmamos que

> *si $f : M \to N$ es una inmersión entre variedades orientadas de la misma dimensión, entonces el conjunto Ω de puntos de M sobre los que f preserva la orientación es un abierto de M.* (2)

Esto implica, en nuestra situación, que A y B son abiertos de S^2, así que —como la esfera es conexa— uno de los dos es vacío.

Probemos (2). Sea $f : M \to N$ una inmersión entre variedades orientadas de dimensión n y sea Ω el conjunto de puntos de M sobre los que f preserva la orientación. Sean o y o' las orientaciones de M y de N, respectivamente. Sea $x \in \Omega$ y sea $U \subseteq M$ un abierto conexo tal que $x \in U$, $f(U)$ es un abierto de N y $f|_U : U \to f(U)$ es un difeomorfismo; notemos que la existencia de U sigue del teorema de la función inversa y de la observación de que $f_{*x} : T_xM \to T_{f(x)}N$ es un isomorfismo. Sustituyendo en caso de que sea necesario a U por un abierto más chico, podemos suponer además que hay una carta $\phi : f(U) \to \mathbb{R}^n$ de N, y entonces $\phi \circ f : U \to \mathbb{R}^n$ es una carta de M. Más aún, componiendo a ϕ con una función lineal podemos suponer que la base ordenada $(\frac{\partial \phi\circ f}{\partial x_1}\big|_x, \dots, \frac{\partial \phi\circ f}{\partial x_n}\big|_x)$ de T_xM es positiva con respecto a la orientación $o(x)$; como o es una orientación y U es conexo, se sigue de esto que de hecho para cada $y \in U$ la base ordenada $(\frac{\partial \phi\circ f}{\partial x_1}\big|_y, \dots, \frac{\partial \phi\circ f}{\partial x_n}\big|_y)$ de T_yM es positiva con respecto a la orientación $o(y)$.

Como $x \in \Omega$ y $f_{*x}(\frac{\partial \phi\circ f}{\partial x_i}\big|_x) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\big|_{f(x)}$, la base ordenada $(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\big|_{f(x)}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\big|_{f(x)})$ de $T_{f(x)}N$ es positiva con respecto a la orientación $o'(f(x))$ y, otra vez porque $f(U)$ es conexo, se sigue de esto que para cada $z \in f(U)$ la base ordenada $(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\big|_z, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\big|_z)$ de T_zN es positiva con respecto a la orientación $o'(z)$. Como para todo $y \in U$ se tiene que $f_{*y}(\frac{\partial \phi\circ f}{\partial x_i}\big|_y) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\big|_{f(y)}$, esto nos dice que la imagen por f_{*y} de la orientación $o(y)$ de T_yM es la orientación $o'(f(y))$ de $T_{f(y)}N$ para todo $y \in U$, esto es, que $U \subseteq \Omega$. Así, x es un punto interior de Ω, que entonces es un conjunto abierto de M, como queríamos. □

2. Una variedad que posee un atlas con exactamente dos cartas cuyos dominios se intersecan en un conexo es orientable. ¿Puede relajar alguna de estas hipótesis manteniendo la conclusión?

Solución. Sea M una variedad y supongamos que $\mathscr{A} = \{\phi : U \to \mathbb{R}^n, \psi : V \to \mathbb{R}^n\}$ es un atlas de M tal que $U \cap V$ es conexo. Si es un atlas orientado, entonces M es orientable, así que supongamos que no lo es. Entonces la matriz jacobiana de la función de transición $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ tiene determinante negativo en todo su dominio, porque no es positivo en algún lado, nunca se anula, y su dominio es conexo. Si $S : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $\tilde\psi = S \circ \phi : V \to \mathbb{R}^n$ también es una carta de M, $\tilde{\mathscr{A}} = \{\phi, \tilde\psi\}$ es un atlas de M y es inmediato que $\tilde{\mathscr{A}}$ es un atlas *orientado* de M, así que M es otra vez orientable. □

3. Enuncie y pruebe en detalle las caracterizaciones equivalentes de la orientabilidad de una variedad en término de

- orientaciones coherentes de los espacios tangentes;
- atlas con funciones de transición positivamente compatibles;
- existencia de formas de volumen

4. Si M es una variedad de dimensión dos que tiene un atlas tal que todas las funciones de transición correspondientes son funciones holomorfas, entonces M es orientable.

Solución. Sea $\mathscr{A}$ un atlas de M tal que cada vez que $\phi : U \to \mathbb{R}^2$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^2$ son cartas de $\mathscr{A}$, la composición $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es holomorfa. Para ver que M es orientable basta mostrar que $\mathscr{A}$ es un atlas orientado y, para eso, que todas las funciones de transición tienen jacobiano positivo. En vista de la condición satisfecha por $\mathscr{A}$, es suficiente con mostrar que

> *si $f : U \to V$ es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^2$ que es holomorfo, entonces la matriz jacobiana de f tiene determinante positivo.*

Sea entonces $f : U \to V$ un difeomorfismo holomorfo, y sean $u, v : U \to \mathbb{R}$ las componentes de f. Sabemos que f satisface las condiciones de Cauchy-Riemann, esto es, que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, de manera que la matriz jacobiana de f tiene determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Como f es un difeomorfismo, su jacobiana no se anula nunca, así que esto muestra que ella es siempre positiva. □

5. Si M es una variedad, entonces las variedades TM y T^*M son orientables.

Solución. Mostremos que TM es orientable—el argumento para T^*M es completamente similar—probando que el atlas que usamos para construir la estructura diferenciable de TM es un atlas orientado. Para ello, consideremos dos cartas $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ y sean $\tilde{\phi} : TU \to \mathbb{R}^{2n}$ y $\tilde{\psi} : TV \to \mathbb{R}^{2n}$ las correspondientes cartas de TM: tenemos que verificar que si $x \in TU \cap TV$, entonces el determinante de la matriz jacobiana de la función $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1} : \tilde{\phi}(TU \cap TV) \to \tilde{\psi}(TU \cap TV)$ es positivo. Recordemos que $\tilde{\phi}(TU \cap TV)$ y $\tilde{\psi}(TU \cap TV)$ son $\phi(U \times V) \times \mathbb{R}^n$ y $\psi(U \times V) \times \mathbb{R}^n$, y que la función $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}$ es

$$(x, v) \in \phi(U \times V) \times \mathbb{R}^n \mapsto ((\psi \circ \phi^{-1})(x), D_x(\psi \circ \phi^{-1})(v) \in \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n,$$

cuya diferencial es

$$(w, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto (D_x(\psi \circ \phi^{-1})(w), D_x(\psi \circ \phi^{-1})(v)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Esta función lineal tiene determinante $(\det D_x(\psi \circ \phi^{-1}))^2 > 0$. □

6. Una variedad paralelizable es orientable. En particular, un grupo de Lie es orientable.

Solución. Sea M una variedad paralelizable de dimensión n y sean $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ campos sobre M tales que para cada $x \in M$ el conjunto $\{X_{1x}, \dots, X_{nx}\}$ es una base de T_xM. Para cada $x \in M$ sea B_x la base *ordenada* $(X_{1x}, \dots, X_{nx})$ y sea $o_x = [B_x]$ la orientación T_xM que determina B_x. Mostremos que esto define una orientación o de M.

Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M con dominio conexo. Hay funciones $X_{i,j} \in C^\infty(U)$ tales que $X_i = \sum_{j=1}^n X_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}$ sobre U. Si cada cada $x \in U$ escribimos B_x^ϕ a la base ordenada $(\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\big|_x)$, entonces la matriz de cambio de base $C(B_x^\phi, B_x)$ es precisamente

$(X_{i,j}(x))_{1\leq i,j\leq n}$. Vemos así que la función $x \in U \mapsto \det C(B_x^\phi, B_x)$ es diferenciable. Como no se anula y U es conexo, vemos que o bien la orientación o coincide con la inducida por ϕ en U o bien es distinta en todo U. Que o es una orientación, entonces, sigue de que hay un atlas de M con dominios conexos.

Alternativamente, construyamos a partir de los campos $X_1, \dots, X_n$ una forma de volumen sobre M. Sea $i \in \{1,\dots,n\}$. Si $x \in M$, existe una única función lineal $\omega_{ix} : T_xM \to \mathbb{R}$ tal que $\omega_{ix}(X_{jx}) = \delta_{i,j}$; en efecto, esto es consecuencia inmediata de que $\{X_{1x},\dots,X_{nx}\}$ es una base de T_xM. Si mostramos que la asignación $x \in M \mapsto \omega_{ix} \in T_x^*M$ es diferenciable, tendremos definida una 1-forma $\omega_i \in \Omega^1(M)$. Para hacerlo, basta mostrar que si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo diferenciable, entonces $\omega_i(X) \in C^\infty(M)$. Sea entonces $X \in \mathfrak{X}(M)$; existen funciones $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M)$ tales que $X = \sum_{j=1}^n f_j X_j$, y entonces $\omega_i(X) = \sum_{j=1}^n f_j \omega_i(X_j) = f_i$, que es diferenciable.

Tenemos entonces n 1-formas $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega^1(M)$, y podemos considerar la n-forma producto $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n \in \Omega^n(M)$. Se trata de una forma de volumen, porque no se anula: en efecto, es $\omega(X_1,\dots,X_n) \equiv 1$. Esto muestra, otra vez, que M es orientable. □

7. Si M y N son variedades no vacías, entonces $M \times N$ es orientable sii M y N lo son.

Solución. Supongamos primero que M y N son orientables, y sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{A}'$ atlas orientados de M y de N, respectivamente, y consideremos el atlas $\mathscr{A}''$ sobre $M \times N$ cuyas cartas son las funciones $\phi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ con $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ cartas de $\mathscr{A}$ y de $\mathscr{A}'$, respectivamente; notemos que $\mathscr{A}''$ está contenido en el atlas que usamos para definir la estructura diferenciable de $M \times N$ y claramente los dominios de sus elementos cubren a este espacio, así que se trata en efecto de un atlas.

Para ver que $M \times N$ es orientable, bastará que mostremos que $\mathscr{A}''$ es un atlas orientado. Sean entonces $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^m$, $\phi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$ dos cartas de $\mathscr{A}$ y $\psi_1 : V_1 \to \mathbb{R}^n$, $\psi_2 : V_2 \to \mathbb{R}^n$ dos cartas de $\mathscr{A}'$, de manera que $\phi_1 \times \psi_1 : U_1 \times V_1 \to \mathbb{R}^{m+n}$ y $\phi_2 \times \psi_2 : U_2 \times V_2 \to \mathbb{R}^{m+n}$ son dos cartas de $\mathscr{A}''$. Es $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$, y la función de transición

$$(\phi_2\times\psi_2)\circ(\phi_1\times\psi_1)^{-1} : (\phi_1\times\psi_1)\big((U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)\big) \to (\phi_2\times\psi_2)\big((U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)\big)$$

es la función

$$(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) \times (\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) : \phi_1(U_1 \cap U_2) \times \psi_1(V_1 \cap V_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2) \times \psi_2(V_1 \cap V_2).$$

En cada punto $(x, y) \in \phi_1(U_1 \cap U_2) \times \psi_1(V_1 \cap V_2)$ la diferencial

$$D_{(x,y)}((\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) \times (\psi_2 \circ \psi_1^{-1})) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$$

es la función

$$\begin{pmatrix} D_x(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) & 0 \\ 0 & D_y(\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n,$$

cuyo determinante es $\det D_x(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) \cdot \det D_y(\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) > 0$.

Para probar la recíproca, supongamos que $M \times N$ es orientable, y mostremos que M también lo es. Si $V \subseteq N$ es un abierto de N difeomorfo a $\mathbb{R}^n$, entonces $M \times V$ es un abierto de $M \times N$ y, en particular, es él mismo una variedad orientable. Esto muestra que podemos suponer que $N = \mathbb{R}^n$, y tenemos que mostrar entonces que

si $M \times \mathbb{R}^n$ es orientable, entonces M lo es.

Como el producto cartesiano es asociativo, una inducción evidente muestra que, de hecho, es suficiente que probemos que

si $M \times \mathbb{R}$ es orientable, entonces M lo es.

Si $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ son cartas de M, entonces las funciones $\phi \times \mathrm{id} : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ y $\psi \times \mathrm{id} : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ son cartas de $M \times \mathbb{R}$, tenemos campos $\frac{\partial^{\phi\times\mathrm{id}}}{\partial t} \in \mathfrak{X}(U \times \mathbb{R})$ y $\frac{\partial^{\psi\times\mathrm{id}}}{\partial t} \in \mathfrak{X}(V \times \mathbb{R})$, y es inmediato que $\frac{\partial^{\psi\times\mathrm{id}}}{\partial t}\Big|_{(U\cap V)\times\mathbb{R}} = \frac{\partial^{\psi'}}{\partial t}\Big|_{(U\cap V)\times\mathbb{R}}$. Esto implica que existe un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$ tal que para cada carta $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de M es $X|_{U\times\mathbb{R}} = \frac{\partial^{\phi\times\mathrm{id}}}{\partial t}$.

Sea $\omega \in \Omega^{n+1}(M \times \mathbb{R})$ una forma de volumen sobre $M \times \mathbb{R}$, cuya existencia está asegurada por la orientabilidad de $M \times \mathbb{R}$, sea $q : x \in M \mapsto (x, 0) \in M \times \mathbb{R}$, y consideremos la n-forma $\tilde{\omega} = q^*(\iota_X \omega) \in \Omega^n(M)$. Para mostrar que M es orientable bastará que mostremos que $\tilde{\omega}$ no se anula en ningún punto de M.

Sea entonces $x \in M$, sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M tal que $x \in U$ y, como antes, sea $\phi \times \mathrm{id} : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ la carta de $M \times \mathbb{R}$ que corresponde a ϕ, cuyo domino contiene al punto $q(x) = (x, 0)$. Es claro que $q_{*x}(\frac{\partial^\phi}{\partial x_i}\big|_x) = \frac{\partial^{\phi\times\mathrm{id}}}{\partial x_i}\big|_{(x,0)}$ y de la definición del campo X es $X_{(x,0)} = \frac{\partial^{\phi\times\mathrm{id}}}{\partial t}\big|_{(x,0)}$, y entonces

$$
\begin{aligned}
\tilde{\omega}_x\Big(\frac{\partial^\phi}{\partial x_1}\Big|_x, \ldots, \frac{\partial^\phi}{\partial x_1}\Big|_x\Big) &= (q^*\iota_X\omega)\Big(\frac{\partial^\phi}{\partial x_1}\Big|_x, \ldots, \frac{\partial^\phi}{\partial x_1}\Big|_x\Big) \\
&= \omega\Big(q_{*x}\Big(\frac{\partial^\phi}{\partial x_1}\Big|_x\Big), \ldots, q_{*x}\Big(\frac{\partial^\phi}{\partial x_1}\Big|_x\Big), X\Big) \\
&= \omega\Big(\frac{\partial^{\phi\times\mathrm{id}}}{\partial x_1}\Big|_{(x,0)}, \ldots, \frac{\partial^{\phi\times\mathrm{id}}}{\partial x_n}\Big|_{(x,0)}, \frac{\partial^{\phi\times\mathrm{id}}}{\partial t}\Big|_{(x,0)}\Big) \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

porque $\left\{\frac{\partial^{\phi\times\mathrm{id}}}{\partial x_1}\big|_{(x,0)}, \ldots, \frac{\partial^{\phi\times\mathrm{id}}}{\partial x_n}\big|_{(x,0)}, \frac{\partial^{\phi\times\mathrm{id}}}{\partial t}\big|_{(x,0)}\right\}$ es una base de $T_{(x,0)}(M \times \mathbb{R})$ y $\omega_{(x,0)}$ es una n-forma no nula sobre ese espacio vectorial. □

8. Sea M una variedad, sea $\tilde{M}$ el conjunto de pares (x, o) con $x \in M$ y o una orientación de T_xM y sea $p : \tilde{M} \to M$ la función tal que $p(x, o) = x$ para todo $(x, o) \in \tilde{M}$.

(a) Muestre que $\tilde{M}$ es, de manera natural, una variedad. Con respecto a esa estructura, la función $p : \tilde{M} \to M$ es un revestimiento diferenciable de dos hojas.

(b) La variedad $\tilde{M}$ es orientable.

(c) La variedad M es orientable si y solamente si existe una función diferenciable $s : M \to \tilde{M}$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_M$.

(d) Una variedad simplemente conexa es orientable.

(e) Una variedad cuyo grupo fundamental no contiene subgrupos de índice 2 es orientable.