Geometría Diferencial

Primer Cuatrimestre — 2012

Práctica 3: Campos

1. (a) Sea $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ la esfera unitaria y sea $f : (x, y, z) \in S^2 \mapsto z \in \mathbb{R}$. Muestre que se trata de una función diferenciable, determine la función diferencial f_{*p} para cada $p \in S^2$ y calcule su rango.

(b) Sean $0 < r < R$ y sea $T \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie de revolución que se obtiene haciendo girar la circunferencia de ecuaciones

$$(x - R)^2 + z^2 = r^2, \qquad y = 0$$

alrededor del eje z. Muestre que se trata de una subvariedad de $\mathbb{R}^3$ y repita la parte anterior de este ejercicio para la función $f : (x, y, z) \in T \mapsto z \in \mathbb{R}$.

2. Sea M una variedad y sea $x \in M$.

(a) Sea G el conjunto de todas las funciones diferenciables $f : U \to \mathbb{R}$ definidas en un abierto $U \subseteq M$ que contiene a x. Sea $\sim$ la relación sobre G tal que si $f : U \to \mathbb{R}$ y $g : V \to \mathbb{R}$ son dos elementos de G, entonces $f \sim g$ sii existe abierto $W \subseteq U \cap V$ tal que $x \in W$ y $f|_W = g|_W$. Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia sobre G y podemos, en particular, considerar el conjunto cociente $\mathscr{G} = G/\sim$.

(b) Si $f : U \to \mathbb{R}$, $f' : U' \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$ y $g' : V' \to \mathbb{R}$ son cuatro elementos de G y $f \sim f'$ y $g \sim g'$, entonces $f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V} \sim f'|_{U'\cap V'} + g'|_{U'\cap V'}$. Esto permite definir una función $+ : \mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ de manera que si $f : U \to \mathbb{R}$ y $g : V \to \mathbb{R}$ son elementos de G y $[f]$ y $[g]$ son sus clases en $\mathscr{G}$, entonces $[f] + [g] = [f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V}]$. Procediendo de la misma forma pero a partir de la multiplicación podemos construir una función $\cdot : \mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathscr{G}$. Muestre que de esta forma $\mathscr{G}$ resulta ser una $\mathbb{R}$-*álgebra*.

(c) El conjunto $I \subseteq \mathscr{G}$ de las clases de equivalencia de las funciones $f : U \to \mathbb{R}$ de G tales que $f(x) = 0$ es un ideal maximal de $\mathscr{G}$.

(d) Como I es un ideal, podemos considerar el ideal I^2, que está contenido en I, y el espacio vectorial cociente I/I^2. Muestre que, si $(I/I^2)^*$ denota el espacio vectorial dual a I/I^2, hay un isomorfismo canónico $(I/I^2)^* \cong T_x M$.

3. Sean M una variedad y $f \in C^\infty(M)$. Si f tiene un máximo local en $p \in M$, entonces $f_{*x} = 0$.

4. Sean M una variedad, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$. Muestre que

$$[X, fY] = Xf\, Y + f[X, Y]$$

primero usando las propiedades de las derivaciones y del corchete de Lie, y después usando la expresión en coordenadas del corchete de Lie.

5. Sea G un grupo de Lie, e su elemento neutro y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, esto es, el subespacio de $\mathfrak{X}(G)$ de los campos invariantes a izquierda. Muestre que hay un isomorfismo lineal $q : \mathfrak{g} \to T_e G$ tal que $q(X) = X_e$ para cada $X \in \mathfrak{g}$.

6. Sea G un grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$ un campo vectorial invariante a izquierda. Pruebe que X es *completo* y describa el flujo asociado.

Sugerencia. Muestre que si $g, h \in G$ y $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ es una curva integral de X que arranca en $g = \gamma(0)$ entonces la curva $\eta : t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto h\gamma(t) \in G$ es una curva integral de X que arranca en hg. Use esta observación para probar que el intervalo maximal de definición de todas las curvas integrales de X es $\mathbb{R}$.

7. (a) Considere en $\mathbb{R}^2$ el campo $X = -y\partial_x + x\partial_y$, encuentre sus curvas integrales y determine si se trata de un campo completo.

(b) Sea $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz real y considere sobre $\mathbb{R}^n$ el campo vectorial $X = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i \partial_{x_j}$. Describa sus curvas integrales y su flujo.

8. Muestre que el conjunto

$$G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

es un subgrupo de Lie de $\mathsf{GL}(2, \mathbb{R})$ que tiene a la función

$$\phi : \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G \mapsto (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

como carta global. Con respecto al sistema de coordenadas correspondiente a esta carta, consideremos un campo $X = f(a, b)\partial_a + g(a, b)\partial_b \in \mathfrak{X}(G)$. ¿Qué condiciones tienen que satisfacer las funciones $f, g \in C^\infty(G)$ para que X sea un campo vectorial invariante a izquierda? ¿Y a derecha? Determine la estructura de Lie del álgebra de Lie de G.

9. Sea G un grupo de Lie, e su elemento neutro y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie.

(a) Si $v \in T_e G$ es un vector tangente a G en e y $X \in \mathfrak{g}$ es el único campo vectorial invariante a izquierda tal que $X_e = v$, sea $\gamma_v : \mathbb{R} \to G$ la única curva integral de X tal que $\gamma_v(0) = e$. Entonces γ_v es un homomorfismo de grupos, esto es,

$$\gamma_v(t + t') = \gamma_v(t) \cdot \gamma_v(t'), \qquad \forall t, t' \in \mathbb{R}.$$

(b) Definimos una función $\mathsf{exp} : T_e G \to G$ poniendo, para cada $v \in T_e G$,

$$\mathsf{exp}(v) = \gamma_v(1).$$

Determine la diferencial $\mathsf{exp}_{*0} : T_e G \to T_e G$ y muestre que exp es localmente un difeomorfismo alrededor de 0.

(c) Muestre que si $v, w \in T_e G$ son tales que $[v, w] = 0$, entonces

$$\mathsf{exp}(v + w) = \mathsf{exp}(v) \cdot \mathsf{exp}(w).$$

10. Sea $G = \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$. Recordemos que podemos identificar $T_I G$ con $M_n(\mathbb{R})$.

(a) Para cada $A \in M_n(\mathbb{R})$, describa explicitamente el campo tangente X_A sobre G que es invariante a izquierda y tal que $(X_A)_I = A$.

(b) Determine la función $\mathsf{exp} : T_e G \to G$.

(c) Muestre que $\mathsf{exp} : T_e G \to G$ no es un homomorfismo de grupos.

Marius Sophus Lie
1842–1899, Noruega