Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2012

Práctica 3: Campos

1. (a) Sea $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ la esfera unitaria y sea $f : (x, y, z) \in S^2 \mapsto z \in \mathbb{R}$. Muestre que se trata de una función diferenciable, determine la función diferencial f_{*p} para cada $p \in S^2$ y calcule su rango.

(b) Sean $0 < r < R$ y sea $T \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie de revolución que se obtiene haciendo girar la circunferencia de ecuaciones

$$(x-R)^2 + z^2 = r^2, \qquad y = 0$$

alrededor del eje z. Muestre que se trata de una subvariedad de $\mathbb{R}^3$ y repita la parte anterior de este ejercicio para la función $f : (x, y, z) \in T \mapsto z \in \mathbb{R}$.

Solución. (a) La función $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto z \in \mathbb{R}$ es una función evidentemente diferenciable, así que su restricción a la subvariedad $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ también lo es.

Alternativamente, sean $N = (0,0,1)$, $S = (0,0,-1) \in S^2$, $U = S^2 \setminus \{N\}$ y $V = S^2 \setminus \{S\}$ y $\phi_N : U \to \mathbb{R}^2$ y $\phi_S : V \to \mathbb{R}^2$ las proyecciones esteriográficas desde N y desde S, de manera que $\{\phi_N, \phi_S\}$ es un atlas de S^2. Para ver que $f : S^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable tenemos que mostrar que las composiciones $f \circ \phi_S^{-1}$, $f \circ \phi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son diferenciables.

Recordemos que

$$\phi_N^{-1} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \frac{(2x, 2y, x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2 + 1} \in S^2$$

y

$$\phi_S^{-1} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \frac{(2x, 2y, -x^2 - y^2 + 1)}{x^2 + y^2 + 1} \in S^2,$$

así que

$$f \circ \phi_N^{-1} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \in \mathbb{R}$$

y

$$f \circ \phi_S^{-1} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \frac{-x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1} \in \mathbb{R},$$

y estas dos funciones son claramente diferenciables.

Calculemos la diferencial de f. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $p = \phi_N^{-1}(x, y)$. Entonces

$$f_{*p}\Big(\frac{\partial^{\phi_N}}{\partial x}\Big|_p\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{(x,y)}(f \circ \phi_N^{-1}) = \frac{4x}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

y

$$f_{*p}\Big(\frac{\partial^{\phi_N}}{\partial y}\Big|_p\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{(x,y)}(f \circ \phi_N^{-1}) = \frac{4y}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Se siguen entonces que

$$f_{*p} = \frac{4x\mathrm{d}x + 4y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

Un cálculo similar puede hacerse sobre el abierto coordenado V.

(b) La superficie Σ descrita en el enunciado tiene ecuación

$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2.$$

Llamemos $F(x,y,z)$ al miembro izquierdo y sea $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 > 0\}$. La función $F : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Si $(x,y,z) \in U$, entonces

$$\nabla F(x,y,z) = 2\left(x\left(1 - \frac{R}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), y\left(1 - \frac{R}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), z\right)$$

Si esto se anula, entonces $z = 0$ y $\sqrt{x^2+y^2} = R$ —porque x e y no se anulan simultáneamente en U,— y entonces $F(x,y,z) = 0 \neq r^2$. Esto muestra que r^2 es un valor regular de F y, en consecuencia, que Σ es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$.

La función $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que para cada α, $\beta \in \mathbb{R}$ es

$$\phi(\alpha,\beta) = \big((R + r\cos\beta)\cos\alpha, (R + r\cos\beta)\sin\alpha, r\sin\beta\big).$$

Calculando, vemos que la imagen de ϕ está contenida en Σ. La matriz jacobiana de ϕ es

$$\begin{pmatrix} -(R+r\cos\beta)\sin\alpha & -r\cos\alpha\sin\beta \\ (R+r\cos\beta)\cos\alpha & -r\sin\alpha\sin\beta \\ 0 & r\cos\beta \end{pmatrix}$$

y sus tres menores son

$$r(R+r\cos\beta)\cos\alpha\cos\beta, \qquad -r(R+r\cos\beta)\sin\alpha\cos\beta, \qquad r(R+r\cos\beta)\sin\beta.$$

La suma de sus cuadrados es $r^2(R + r\cos\beta)^2$, que nunca se anula porque $R > r$. Vemos así que ϕ es una inmersión. Es fácil ver que su imagen es toda la superficie Σ, así que ϕ nos da parametrizaciones alrededor de cada uno de los puntos de Σ.

Sea $f : (x,y,z) \in \Sigma \mapsto z \in \mathbb{R}$, que es diferenciable porque es la restricción a Σ de la función diferenciable $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto z \in \mathbb{R}$. Sea $p = \phi(\alpha_0, \beta_0)$ y consideremos la carta de Σ alrededor de p que se obtiene invirtiendo localmente ϕ. Es

$$f\left(\left.\frac{\partial}{\partial\alpha}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial\alpha}\right|_{(\alpha_0,\beta_0)}(f\circ\phi) = \left.\frac{\partial}{\partial\alpha}\right|_{(\alpha_0,\beta_0)}(r\sin\beta) = 0$$

y

$$f\left(\left.\frac{\partial}{\partial\beta}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial\beta}\right|_{(\alpha_0,\beta_0)}(f\circ\phi) = \left.\frac{\partial}{\partial\beta}\right|_{(\alpha_0,\beta_0)}(r\sin\beta) = r\cos\beta_0.$$

Vemos así que $f_{*p} = r\cos\beta_0\mathrm{d}\beta$. □

2. Sea M una variedad y sea $x \in M$.

(a) Sea G el conjunto de todas las funciones diferenciables $f : U \to \mathbb{R}$ definidas en un abierto $U \subseteq M$ que contiene a x. Sea $\sim$ la relación sobre G tal que si $f : U \to \mathbb{R}$ y $g : V \to \mathbb{R}$ son dos elementos de G, entonces $f \sim g$ sii existe abierto $W \subseteq U \cap V$ tal que $x \in W$ y $f|_W = g|_W$. Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia sobre G y podemos, en particular, considerar el conjunto cociente $\mathscr{G} = G/\sim$.

(b) Si $f : U \to \mathbb{R}$, $f' : U' \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$ y $g' : V' \to \mathbb{R}$ son cuatro elementos de G y $f \sim f'$ y $g \sim g'$, entonces $f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V} \sim f'|_{U'\cap V'} + g'|_{U'\cap V'}$. Esto permite definir una función $+ : \mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ de manera que si $f : U \to \mathbb{R}$ y $g : V \to \mathbb{R}$ son elementos de G y $[f]$ y $[g]$ son sus clases en $\mathscr{G}$, entonces $[f]+[g] = [f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V}]$. Procediendo de la misma forma pero a partir de la multiplicación podemos construir una función $\cdot : \mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathscr{G}$. Muestre que de esta forma $\mathscr{G}$ resulta ser una $\mathbb{R}$-*álgebra*.

(c) El conjunto $I \subseteq \mathscr{G}$ de las clases de equivalencia de las funciones $f : U \to \mathbb{R}$ de G tales que $f(x) = 0$ es un ideal maximal de $\mathscr{G}$.

(d) Como I es un ideal, podemos considerar el ideal I^2, que está contenido en I, y el espacio vectorial cociente I/I^2. Muestre que, si $(I/I^2)^*$ denota el espacio vectorial dual a I/I^2, hay un isomorfismo canónico $(I/I^2)^* \cong T_x M$.

Solución. (a) Mostremos que $\sim$ es una relación de equivalencia:

- Si $f : U \to \mathbb{R}$ es un elemento de G y ponemos $W = U$, entonces $x \in W \subseteq U \cap U$ y $f|_W = f|_W$, así que $f \sim f$.
- Sean $f : U \to \mathbb{R}$ y $g : V \to \mathbb{R}$ elementos de G tales que $f \sim g$, de manera que existe $W \subseteq U \cap V$ tal que $x \in W$ y $f|_W = g|_W$. Pero entonces obviamente $g|_W = f|_W$ y vemos que $g \sim f$.
- Sean $f : U \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$ y $h : W \to \mathbb{R}$ tres elementos de G, y supongamos que $f \sim g$ y que $g \sim h$, de manera que existen abiertos $A \subseteq U \cap V$ y $B \subseteq V \cap W$ tales que $x \in A$, $x \in B$, $f|_A = g|_A$ y $g|_B = h|_B$. Pongamos $C = A \cap B$. Entonces C es un abierto contenido en $U \cap W$ que contiene a x y $f|_C = (f|_A)|_C = (g|_A)|C = g|_C = (g|_B)|_C = (h|_B)|_C = h|_C$, de manera que $f \sim h$.

(b) Sean $f : U \to \mathbb{R}$, $f' : U' \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$ y $g' : V' \to \mathbb{R}$ cuatro elementos de G tales que $f \sim f'$ y $g \sim g'$, de manera que existen abiertos $A \subseteq U \cap U'$ y $B \subseteq V \cap V'$ tales que $x \in A$, $x \in B$, $f|_A = f'|_A$ y $g|_B = g'|_B$. Sea $C = A \cap B$, que es un abierto que contiene a x y contenido en $U \cap V \cap U' \cap V'$. Si $\diamond$ es o bien la suma de funciones $+$ o bien el producto $\cdot$, tenemos que

$$\begin{aligned}(f|_{U\cap V} \diamond g|_{U\cap V})|_C &= (f|_{U\cap V})|_C \diamond (g|_{U\cap V})|_C = (f|_A)|_C \diamond (g|_B)|_C = (f'|_A)|_C \diamond (g'|_B)|_C \\ &= (f'|_{U'\cap V'})|_C \diamond (g'|_{U'\cap V'})|_C = (f'|_{U'\cap V'} \diamond g'|_{U'\cap V'})|_C,\end{aligned}$$

así que $f|_{U\cap V} \diamond g|_{U\cap V} \sim f'|_{U'\cap V'} \diamond g'|_{U'\cap V'}$. Esto implica que existen funciones $+, \cdot : \mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ tal que para cada par de funciones $f : U \to \mathbb{R}$ y $g : V \to \mathbb{R}$ de G con clases $[f]$ y $[g]$ en $\mathscr{G}$ es $[f] + [g] = [f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V}]$ y $[f] \cdot [g] = [f|_{U\cap V} \cdot g|_{U\cap V}]$, porque los miembros derechos de estas ecuaciones dependen solamente de $[f]$ y de $[g]$. Dejamos al lector la verificación de que $\mathscr{G}$ es una $\mathbb{R}$-álgebra con estas operaciones.

(c) Notemos primero es inmediato que si $f : U \to \mathbb{R}$ y $g : V \to \mathbb{R}$ son dos elementos de G tales que $f \sim g$, entonces $f(x) = 0$ sii $g(x) = 0$. Esto significa que si $f : U \to \mathbb{R}$ es un elemento de G, entonces su clase $[f]$ pertenece a I sii $f(x) = 0$. Usando esto y dada la forma en que se definen las operaciones de $\mathscr{G}$ es inmediato verificar que I es un ideal.

Para mostrar que $I \subseteq \mathscr{G}$ es un ideal maximal, basta mostrar que todo elemento de $\mathscr{G} \setminus I$ es inversible. Sea entonces $\phi \in \mathscr{G} \setminus I$ y sea $f : U \to \mathbb{R}$ un elemento de G tal que $\phi = [f]$. Como $\phi \notin I$, es $f(x) \neq 0$ y, como f es continua, existe un abierto $V \subseteq U$ tal que $x \in V$ y $f(y) \neq 0$ para todo $y \in V$. Si ponemos $g : y \in V \mapsto 1/f(y) \in \mathbb{R}$, que es un elemento de G, entonces $[f] \cdot [g] = [1]$ y, en consecuencia, ϕ es inversible en $\mathscr{G}$.

(d) Usando una carta podemos suponer que $M = \mathbb{R}^n$ y que $x = (0, \ldots, 0)$.

Sea $\delta \in T_x M$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ y $g : V \to \mathbb{R}$ son dos elementos de G tales que $f \sim g$, entonces $\delta(f) = \delta(g)$ porque δ es un operador local, así que hay una función $\delta_1 : \mathscr{G} \to \mathbb{R}$ tal que $\delta_1([f]) = \delta(f)$ para toda función $f : U \to \mathbb{R}$ de G. Es inmediato verificar que δ_1 tiene la siguiente propiedad: si $f : U \to \mathbb{R}$ y $g : V \to \mathbb{R}$ son dos elementos de G, entonces

$$\delta_1([f] \cdot [g]) = \delta(f)g(x) + f(x)\delta(g).$$

En particular, si $[f]$, $[g] \in I$, entonces $\delta_1([f] \cdot [g]) = 0$. Vemos así que la restricción $\delta_1|_I : I \to \mathbb{R}$ se anula sobre el subespacio I^2 y, entonces, que induce una función lineal $\delta_2 : I/I^2 \to \mathbb{R}$. Tenemos entonces una función

$$\Phi : \delta \in T_x M \longmapsto \delta_2 \in (I/I^2)^*.$$

Se trata de una función lineal: esto sigue de un cálculo directo.

Supongamos que $\delta \in T_x M$ es tal que $\delta_2 = 0$. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces $f - f(x) : M \to \mathbb{R}$ es un elemento de G y $0 = \delta_2([f - f(x)]) = \delta(f - f(x)) = \delta(f)$: esto nos dice que $\delta = 0$ y prueba que Φ es una función inyectiva.

Sea ahora $\phi : I/I^2 \to \mathbb{R}$ un elemento de $(I/I^2)^*$. Como estamos suponiendo que $M = \mathbb{R}^n$, tenemos funciones $x_1, \dots, x_n : M \to \mathbb{R}$, cuyas clases $[x_1], \dots, [x_n]$ están en I, así que podemos considerar los números $\alpha_i = \phi([x_i] + I^2)$. Para ver que Φ es sobreyectiva bastará que mostremos que $\phi = \Phi(\delta)$ si $\delta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función de G tal que $f(x) = 0$, de manera que su clase $[f]$ en $\mathscr{G}$ está en I. Del teorema de Taylor, sabemos que existen funciones diferenciables $r_{i,j} : M \to \mathbb{R}$ tales que $f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x x_i + \sum_{i=1}^n r_{i,j} x_i x_j$, y entonces es claro que

$$\Phi(\delta)([f]) = \delta_2(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x$$

y, por otro lado, como $\phi(r_{i,j} x_i x_j) = 0$ porque $[r_{i,j} x_i x_j] \in I^2$, es

$$\phi([f]) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x \phi([x_i]) + \sum_{i=1}^n \phi([r_{i,j} x_i x_j]) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x \alpha_i,$$

ya que $[r_{i,j} x_i x_j] \in I^2$. Vemos así que $\Phi(\delta)([f]) = \phi([f])$ y, como esto vale para toda f, que $\Phi(\delta) = \phi$. La función Φ es entonces sobreyectiva y, en definitiva, un isomorfismo. □

3. Sean M una variedad y $f \in C^\infty(M)$. Si f tiene un máximo local en $p \in M$, entonces $f_{*x} = 0$.

Solución. Sea $v \in T_x M$ y sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ una curva tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces $f_{*x}(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} (f \circ \alpha)(t)$. Si f tiene un máximo local en x, entonces $f \circ \alpha$ tiene un máximo local en 0 y, en consecuencia, su derivada allí se anula: vemos así que $f_{*x}(v) = 0$. Como v es arbitrario, esto significa que, de hecho, $f_{*x} = 0$. □

4. Sean M una variedad, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$. Muestre que

$$[X, fY] = Xf\, Y + f[X, Y]$$

primero usando las propiedades de las derivaciones y del corchete de Lie, y después usando la expresión en coordenadas del corchete de Lie.

Solución. Si $g \in C^\infty(M)$ y $x \in M$, calculamos:

$$\begin{aligned}[X, fY]g &= X((fY)(g)) - (fY)(Xg) \\ &= X(fY(g)) - fY(Xg) \\ &= X(f)Y(g) + fX(Y(g)) - fY(Xg) \\ &= \big(X(f)Y - f[X,Y]\big)g.\end{aligned}$$

Por otro lado, sobre una carta, si $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial i}$ e $Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial i}$, entonces

$$[X,Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

y

$$\begin{aligned}&[X, fY] - X(f)Y - f[X,Y] \\ &\quad = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(X_j \frac{\partial (fY_i)}{\partial x_j} - fY_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &\qquad\qquad + f \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &\quad = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(X_j \frac{\partial (fY_i)}{\partial x_j} - fY_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - X_j \frac{\partial f}{\partial x_j} Y_i + fX_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - fY_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

El paréntesis que aparece en esta última suma se anula cualquiera sean i y j, así que $[X, fY] - X(f)Y - f[X,Y] = 0$. □

5. Sea G un grupo de Lie, e su elemento neutro y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, esto es, el subespacio de $\mathfrak{X}(G)$ de los campos invariantes a izquierda. Muestre que hay un isomorfismo lineal $q : \mathfrak{g} \to T_eG$ tal que $q(X) = X_e$ para cada $X \in \mathfrak{g}$.

Solución. Es claro que la función $q : \mathfrak{g} \to T_eG$ es lineal. Si $X \in \mathfrak{g}$ es tal que $q(X) = X_e = 0$, para cada $g \in G$ es $X_g = (L_g)_{*e}(X_e) = 0$ porque X es invariante a izquierda, y entonces $X = 0$: esto nos dice que q es inyectiva. Para mostrar que q es sobreyectiva, sea $v \in T_eG$ y mostremos que existe un campo $X \in \mathfrak{g}$ tal que $X_e = v$.

Para cada $g \in G$ pongamos $X_g = (L_g)_{*e}(v) \in T_gG$. Si $g, h \in H$, entonces

$$(L_g)_{*h}(X_h) = (L_g)_{*h}((L_h)_{*e}(v)) = \big((L_g)_{*h} \circ (L_h)_{*e}\big)(v) = (L_{gh})_{*e}(v) = X_{gh},$$

y esto nos dice que la asignación $g \in G \mapsto X_g \in T_gG$ es invariante a izquierda. Si mostramos que X es diferenciable, claramente tendremos que $X \in \mathfrak{g}$ y $q(X) = v$.

Si $f \in C^\infty(M)$ y $g \in G$, entonces

$$(Xf)(g) = X_g f = (L_g)_{*e}(v)(f) = v(f \circ L_g).$$

Sean $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ cartas de G tales que $e \in U$ y $g \in V$ y $\phi(e) = 0$. Como f y la multiplicación $\mu : G \times G \to G$ son funciones diferenciables, la función

$$(x, y) \in \phi(U) \times \psi(V) \longmapsto (f \circ L_{\psi^{-1}(y)})(\phi^{-1}(x)) = f(\mu(\psi^{-1}(y), \phi^{-1}(x))) \in \mathbb{R}$$

es diferenciable. Si $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\Big|_e$, entonces para cada $y \in \psi(V)$, es

$$v(f \circ L_{\psi^{-1}(y)}) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \big[f(\mu(\psi^{-1}(y), \phi^{-1}(x))) \big]}{\partial x_i}$$

y entonces es claro que la función

$$y \in \psi(V) \longmapsto (Xf)(\psi^{-1}(y)) = v(f \circ L_{\psi^{-1}(y)}) \in \mathbb{R}$$

es diferenciable. Esto nos dice que Xf es diferenciable sobre V y, entonces, que es diferenciable en todo G. Como X manda funciones diferenciables en funciones diferenciables, se trata de un campo diferenciable. □

6. Sea G un grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$ un campo vectorial invariante a izquierda. Pruebe que X es *completo* y describa el flujo asociado.

Sugerencia. Muestre que si $g, h \in G$ y $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ es una curva integral de X que arranca en $g = \gamma(0)$ entonces la curva $\eta : t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto h\gamma(t) \in G$ es una curva integral de X que arranca en hg. Use esta observación para probar que el intervalo maximal de definición de todas las curvas integrales de X es $\mathbb{R}$.

Solución. Fijemos una curva integral $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ de X tal que $\gamma(0) = e$. Sean $g \in G$ y $\xi : (a, b) \to G$ la curva integral *maximal* de X tal que $0 \in (a, b)$ y $\xi(0) = g$. Tenemos que mostrar que $a = -\infty$ y que $b = +\infty$, y nos ocupamos solamente de lo segundo porque lo primero es completamente simétrico.

Supongamos que, por el contrario, $b < \infty$. Elijamos ε' tal que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ y $b - 3\varepsilon'/2 > a$, y sean $h = \xi(b - \varepsilon'/2)$ y $\zeta : (a, b + \varepsilon'/2) \to G$ tal que

$$\zeta(t) = \begin{cases} \xi(t), & \text{si } t < b; \\ h \cdot \gamma(t - b + \varepsilon'/2), & \text{si } t > b - 3\varepsilon'/2. \end{cases}$$

Antes que nada, tenemos que mostrar que esto está bien definido, esto es, que $\xi(t) = h \cdot \gamma(t - b + \varepsilon'/2)$ si $t \in (b - 3\varepsilon'/2, b)$. Para esto, notemos que si $t_0 \in (b - 3\varepsilon'/2, b)$ es $\xi'(t_0) = X_{\xi(t_0)}$ porque ξ es una curva integral de X, y

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0}\big(h \cdot \gamma(t - b + \varepsilon'/2)\big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0}\big(L_h(\gamma(t - b + \varepsilon'/2))\big) \\ &= (L_h)_{*\gamma(t_0 - b + \varepsilon'/2)}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0}\gamma(t - b + \varepsilon'/2)\Big) \\ &= (L_h)_{*\gamma(t_0 - b + \varepsilon'/2)}\big(X_{\gamma(t_0 - b + \varepsilon'/2)}\big) \end{aligned}$$

porque la función $t \mapsto \gamma(t - b + \varepsilon'/2)$ es claramente una curva integral del campo X, y entonces, como X es un campo invariante a izquierda, esto es

$$= X_{h \cdot \gamma(t_0 - b + \varepsilon'/2)}.$$

Vemos así que $t \in (b - 3\varepsilon'/2, b) \mapsto \xi(t) \in G$ y $t \in (b - 3\varepsilon'/2, b) \mapsto h\gamma(t - b + \varepsilon'/2) \in G$ son curvas integrales de X definidas en el mismo intervalo y, como toman el mismo valor h cuando $t = b - \varepsilon'/2$, son de hecho iguales.

Es claro que las restricciones de ζ a los intervalos (a, b) y $(b - 3\varepsilon'/2, b + \varepsilon'/2)$ son diferenciables, así que ζ es diferenciable en todo su dominio. Es entonces una curva integral de X que empieza en g y definida en el intervalo $(a, b + \varepsilon'/2) \supsetneq (a, b)$. Esto es absurdo. □

7. (a) Considere en $\mathbb{R}^2$ el campo $X = -y\partial_x + x\partial_y$, encuentre sus curvas integrales y determine si se trata de un campo completo.

(b) Sea $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz real y considere sobre $\mathbb{R}^n$ el campo vectorial $X = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i \partial_{x_j}$. Describa sus curvas integrales y su flujo.

Solución. (*a*) Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y consideremos la función

$$\gamma : t \in \mathbb{R} \longmapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) := (x_0 \cos t - y_0 \sin t, x_0 \sin t + y_0 \cos t) \in \mathbb{R}^2,$$

que es evidentemente diferenciable y tiene, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\gamma'(t) = (-x_0 \sin t - y_0 \cos t, x_0 \cos t - y_0 \sin t) = (-\gamma_2(t), \gamma_1(t)) = X_{\gamma(t)}.$$

Esto nos dice que γ es una curva integral del campo X, y arranca en $\gamma(0) = (x_0, y_0)$. Obtenemos así todas las curvas integrales de X, y cada una de ellas está definida en todo $\mathbb{R}$, así que el campo es completo.

(*b*) Si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $X_x = xA$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y consideremos la función

$$\gamma : t \in \mathbb{R} \longmapsto x_0 \exp(tA) \in \mathbb{R}^n.$$

Es diferenciable, y si $t \in \mathbb{R}$ es

$$\gamma'(t) = x_0 \exp(tA)A = \gamma(t)A = X_{\gamma(t)},$$

así que se trata de una curva integral del campo X que empieza en $\gamma(0) = x_0$. De esta forma obtenemos todas las curvas integrales maximales de X y vemos que se trata de un campo completo. $\square$

8. Muestre que el conjunto

$$G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$$

es un subgrupo de Lie de $\mathsf{GL}(2, \mathbb{R})$ que tiene a la función

$$\phi : \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G \mapsto (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

como carta global. Con respecto al sistema de coordenadas correspondiente a esta carta, consideremos un campo $X = f(a, b)\partial_a + g(a, b)\partial_b \in \mathfrak{X}(G)$. ¿Qué condiciones tienen que satisfacer las funciones $f, g \in C^\infty(G)$ para que X sea un campo vectorial invariante a izquierda? ¿Y a derecha? Determine la estructura de Lie del álgebra de Lie de G.

Solución. Si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$, entonces

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} aa' & ab'+b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$$

y

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G,$$

así que G es en efecto un subgrupo de $\mathsf{GL}(2, \mathbb{R})$. La función

$$F : \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \longmapsto (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

es diferenciable (porque es la restricción a $\mathsf{GL}(2, \mathbb{R})$ de una función diferenciable definida sobre $M_2(\mathbb{R})$) y $G = F^{-1}(0, 1)$, así que para mostrar que G es una subvariedad de $\mathsf{GL}(2, \mathbb{R})$ basta mostrar que $(0, 1)$ es un valor regular de F, y esto es inmediato porque la matriz jacobiana de F es de hecho constante sobre $\mathsf{GL}(2, \mathbb{R})$ y de rango 2.

La función $\phi : (a,b) \in \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R} \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$ es diferenciable y biyectiva, y es de hecho un difeomorfismo, porque su función inversa $\phi^{-1} : \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G \mapsto (a,b) \in \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$ es diferenciable. Así, ϕ^{-1} es una carta global sobre G.

Si $\mu : G \times G \to G$ es la multiplicación e $\iota : G \to G$ la inversión, entonces las composiciones

$$\phi^{-1} \circ \mu \circ \phi \times \phi : (a,b,a',b') \in \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R} \longmapsto (aa', ab' + b) \in \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$$

y

$$\phi^{-1} \circ \iota \circ \phi : (a,b) \in \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R} \longmapsto (a^{-1}, -ab) \in \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$$

son diferenciables, de manera que μ e ι son diferenciables y G es un grupo de Lie.

Sea $X \in \mathfrak{X}(G)$ un campo. Usando la carta ϕ^{-1}, es

$$X_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} = f(a,b)\frac{\partial}{\partial a} + g(a,b)\frac{\partial}{\partial b}$$

para ciertas funciones f, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R})$. El campo X es invariante a izquierda sii para cada $(a,b) \in \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$ es

$$X_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} = (L_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)})_{*e}(X_e).$$

Como $L_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} : \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} aa' & ab'+b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$, es

$$(L_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)})_{*e}\Big(\frac{\partial}{\partial a}\Big) = a\frac{\partial}{\partial a} \qquad \text{y} \qquad (L_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)})_{*e}\Big(\frac{\partial}{\partial b}\Big) = a\frac{\partial}{\partial b},$$

y entonces

$$(L_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)})_{*e}(X_e) = af(1,0)\frac{\partial}{\partial a} + ag(1,0)\frac{\partial}{\partial b}.$$

El campo X es invariante a izquierda, en conclusión, sii para cada $(a,b) \in \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$ es

$$f(a,b)\frac{\partial}{\partial a} + g(a,b)\frac{\partial}{\partial b} = af(1,0)\frac{\partial}{\partial a} + ag(1,0)\frac{\partial}{\partial b},$$

sii para cada$(a,b) \in \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$ es $f(a,b) = af(1,0)$ y $g(a,b) = ag(1,0)$. Vemos así que todo campo invariante a izquierda es de la forma

$$X_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} = \alpha a\frac{\partial}{\partial a} + \beta a\frac{\partial}{\partial b}.$$

para algunas constantes α, $\beta \in \mathbb{R}$ y que, si ponemos $A = a\frac{\partial}{\partial a}$ y $B = a\frac{\partial}{\partial b}$, el conjunto $\{A,B\}$ es entonces una base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. La estructura de Lie de $\mathfrak{g}$ queda determinada por el valor de $[A,B]$, porque es bilineal y antisimétrica y $\mathfrak{g}$ tiene dimensión 2, y como

$$\Big[a\frac{\partial}{\partial a}, a\frac{\partial}{\partial b}\Big] = a\frac{\partial}{\partial a},$$

vemos que $[A,B] = A$. □

9. Sea G un grupo de Lie, e su elemento neutro y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie.

(a) Si $v \in T_eG$ es un vector tangente a G en e y $X \in \mathfrak{g}$ es el único campo vectorial invariante a izquierda tal que $X_e = v$, sea $\gamma_v : \mathbb{R} \to G$ la única curva integral de X tal que $\gamma_v(0) = e$. Entonces γ_v es un homomorfismo de grupos, esto es,

$$\gamma_v(t + t') = \gamma_v(t) \cdot \gamma_v(t'), \qquad \forall t, t' \in \mathbb{R}.$$

(b) Definimos una función $\exp : T_eG \to G$ poniendo, para cada $v \in T_eG$,

$$\exp(v) = \gamma_v(1).$$

Determine la diferencial $\exp_{*0} : T_eG \to T_eG$ y muestre que exp es localmente un difeomorfismo alrededor de 0.

(c) Muestre que si $v, w \in T_eG$ son tales que $[v,w] = 0$, entonces

$$\exp(v+w) = \exp(v) \cdot \exp(w).$$

Solución. (a) Sea $v \in T_eG$, sea $X \in \mathfrak{g}$ tal que $X_e = v$ y sea $\gamma_v : \mathbb{R} \to G$ la curva integral de X tal que $\gamma_v(0) = e$. Sea $t' \in \mathbb{R}$ y consideremos las dos curvas $\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma_v(t+t') \in G$ y $\beta : t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma_v(t') \cdot \gamma_v(t) \in G$. Es

$$\alpha'(t) = \gamma_v'(t+t') = X_{\gamma_v(t+t')} = X_{\alpha(t)}$$

y

$$\beta'(t) = (L_{\gamma_v(t')})_{*\gamma_v(t)}(\gamma_v'(t)) = (L_{\gamma_v(t')})_{*\gamma_v(t)}(X_{\gamma_v(t)}) = X_{\gamma_v(t')\cdot\gamma_v(t)} = X_{\beta(t)},$$

así que las dos curvas son curvas integrales de X. Como las dos empiezan en $\gamma_v(t')$, vemos que $\alpha = \beta$, esto es, es $\gamma_v(t+t') = \gamma_v(t') \cdot \gamma_v(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como t' es también arbitrario, esto prueba lo que queríamos.

(b) Consideremos la variedad producto $G \times T_eG$. Si $(g,v) \in G \times T_eG$, entonces hay una identificación canónica

$$T_{(g,v)}(G \times T_eG) = T_gG \oplus T_v(T_eG) = T_gG \oplus T_eG.$$

Consideremos el campo tangente Z sobre $G \times T_eG$ tal que para cada $(g,v) \in G \times T_eG$ es

$$Z_{(g,v)} = ((L_g)_*(v), 0) \in T_gG \oplus T_eG.$$

Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de G en e tal que $\phi(e) = 0$. Si $f \in C^\infty(G \times T_eG)$ y $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$, entonces

$$Z_{(g,v)}f = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[f(\mu(g, \phi^{-1}(x)), v)\Big]\Big|_{x=0},$$

y el miembro izquierdo de esta igualdad depende diferenciablemente de (g,v): esto muestra que Z es un campo diferenciable sobre $G \times T_eG$.

Sea $(g,v) \in G \times T_eG$ y sea $\gamma_v : \mathbb{R} \to G$ como antes. Entonces la curva

$$\Gamma_{(g,v)} : t \in \mathbb{R} \mapsto (g\gamma_v(t), v) \in G \times T_eG$$

es una curva integral del campo Z que empieza en (g,v): esto último es claro, y para ver lo primero calculamos que

$$\Gamma'_{(g,v)}(t) = ((L_g)_{*\gamma_v(t)}(\gamma_v'(t)), 0) = (X_{g\gamma_v(t)}, 0) = ((L_{\gamma_v(t)})_{*e}(v), 0) = Z_{(\gamma_v(t), v)} = Z_{\Gamma_{(g,v)}(t)}.$$

Vemos así que el campo Z es completo, y entonces su flujo es una función *diferenciable* $\Theta : \mathbb{R} \times G \times T_eG \to G \times T_eG$. Como $\Theta(1, e, v) = \exp(v)$, esto implica, en particular, que la función $\exp : T_eG \to G$ es diferenciable.

Sea $v \in T_eG$ y $s \in \mathbb{R}$. Sea $X \in \mathfrak{g}$ tal que $X_e = v$; es claro que $sX \in \mathfrak{g}$ es el campo invariante a izquierda que extiende a sv. Consideremos las dos curvas $\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma_{sv}(t) \in G$ y $\beta : t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma_v(st) \in G$. Claramente $\alpha(0) = \beta(0) = e$, y $\alpha'(t) = \gamma'_{sv}(t) = sX_{\gamma_{sv}(t)} = sX_{\alpha(t)}$ y

$\beta'(t) = s\gamma_v'(st) = sX_{\gamma_v(st)} = sX_{\beta(t)}$: esto nos dice que α y β son curvas integrales del campo sX que arrancan en e, y por unicidad concluimos que

$$\gamma_{sv}(t) = \gamma_v(st), \qquad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

Determinemos la diferencial $\exp_{*0} : T_eG \to T_eG$; aquí estamos identificando a $T_0(T_eG)$ con T_eG, como siempre. Sea $v \in T_eG$; la curva $\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto tv \in T_eG$ es tal que $\alpha(0) = 0$ y $\alpha'(0) = v$, así que para cada $f \in C^\infty(T_eMG)$ es $v(f) = (f \circ \alpha)'(0)$. Si ahora $f \in C^\infty(G)$, entonces

$$\begin{aligned} \exp_{*0}(v)(f) &= v(f \circ \exp) = (f \circ \exp \circ \alpha)'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 (f(\exp(tv))) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 (f(\gamma_{tv}(1))) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 (f(\gamma_v(t))) = v(f), \end{aligned}$$

porque $\gamma_v : \mathbb{R} \to G$ es una curva tal que $\gamma_v(0) = e$ y $\gamma_v'(0) = v$. Esta igualdad vale cualquiera sea f, así que $\exp_{*0}(v) = v$ y la función $\exp_{*0} : T_eG \to T_eG$ es la identidad. En particular, se trata de un isomorfismo lineal, así que el teorema de la función inverso implica que $\exp : T_eG \to G$ es un difeomorfismo en un entorno de 0.

(c) TERMINAR

10. Sea $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Recordemos que podemos identificar T_IG con $M_n(\mathbb{R})$.

(a) Para cada $A \in M_n(\mathbb{R})$, describa explicitamente el campo tangente X_A sobre G que es invariante a izquierda y tal que $(X_A)_I = A$.

(b) Determine la función $\exp : T_eG \to G$.

(c) Muestre que $\exp : T_eG \to G$ no es un homomorfismo de grupos.

Solución. (a) Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y sea $X \in \mathfrak{g}$ el campo tangente invariante a izquierda tal que $X_I = A$. Si $B \in G$, entonces

$$X_B = (L_B)_{*I}(A) = \lim_{t \to 0} \frac{L_B(I + tA) - L_B(I)}{t} = BA,$$

y esto describe completamente el campo X.

(b) Si $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA} \in G$, entonces $\gamma(0) = I$ y $\gamma'(t) = e^{tA}A = \gamma(t)A = X_{\gamma(t)}$, así que γ es la curva integral del campo X que empieza en I. De acuerdo a las definiciones, esto implica que $\exp(A) = \gamma(1) = e^A$, y esto describe la función esponencial $\exp : T_eG \to G$.

(c) Es $\exp\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y $\exp\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, pero

$$\exp\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \frac{1}{2e}\begin{pmatrix} 1 + e^2 & -1 + e^2 \\ -1 + e^2 & 1 + e^2 \end{pmatrix} \neq \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

así que exp no es un homomorfismo. □

Marius Sophus Lie
1842–1899, Noruega