GEOMETRÍA DIFERENCIAL
Primer Cuatrimestre — 2012

Práctica 2: Espacios tangentes

1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $\mathscr{A}$ su atlas maximal. Sea $TM = \bigcup_{p\in M} M_p$ y sea $\pi : TM \to M$ definida por $\pi(v) = p$ si $v \in M_p$. Para cada $(U, x) \in \mathscr{A}$, sea $TU = \bigcup_{p\in U} M_p \subset TM$ y $\overline{x} : TU \to x(U)\times\mathbb{R}^n$ la aplicación definida por

$$\overline{x}(v) = (x(\pi(v)), v(x^1), \dots, v(x^n))$$

o, equivalentemente,

$$\overline{x}\Big(\sum_{i=1}^n v(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big) = (x^1(p), \dots, x^n(p), v(x^1), \dots, v(x^n))$$

para cada $p \in U$ y $v \in M_p$. Escribiendo $\overline{x} = (\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n, \overline{x}^{n+1}, \dots, \overline{x}^{2n})$, será, para cada $n \in \{1, \dots, n\}$,

$$\overline{x}^i(v) = x^i(\pi(v)) = x^i \circ \pi(v)$$

y

$$\overline{x}^{n+i}(v) = v(x^i).$$

(a) La función $\overline{x} : TU \to x(U)\times\mathbb{R}^n$ es una biyección con inversa tal que

$$\overline{x}^{-1}(a, b^1, \dots, b^n) = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x^{-1}(a)}$$

para cada $a \in x(U)$.

(b) Si (U, x), $(V, y) \in \mathscr{A}$ y $U\cap V \neq \emptyset$, entonces $\overline{x}(TU\cap TV)\times\mathbb{R}^n$ es un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$ y la biyección $\overline{x}\circ\overline{y}^{-1} : y(U\cap V)\times\mathbb{R}^n \to x(U\cap V)\times\mathbb{R}^n$ está dada por

$$\overline{x}\circ\overline{y}^{-1}(a,b) = \left(x\circ y^{-1}(a), \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial(x^1\circ y^{-1})}{\partial u^i}\Big|_a, \dots, \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial(x^n\circ y^{-1})}{\partial u^i}\Big|_a\right),$$

así que, en particular, es diferenciable.

(c) Deduzca de esto que TM admite una estructura diferenciable que lo transforma en una variedad diferenciable de dimensión $2n$.

(d) Con esta estructura diferenciable, la proyección $\pi : TM \to M$ es diferenciable.

2. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $f \in C^\infty(M)$. Probar que la aplicación $df : TM \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

3. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y (U, x) una carta de M. Sean $p \in U$ y $a = x(p)$. Entonces la aplicación $(x^{-1})_{*a} : \mathbb{R}^n_a \to M_p$ es tal que

$$(x^{-1})_{*a}(D_i\big|_a) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

para todo $1 \le i \le n$.

4. Sean M y N variedades diferenciables y sea $f : M \to N$ una función diferenciable.

(a) Si f es constante, entonces $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$.

(b) Si M es conexa y $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$, entonces f es constante.

5. Calcule f_{*p} para

(a) $f = \pi_1 : M \times N \to M$;

(b) $f = \pi_2 : M \times N \to M$;

(c) $f : S^n \to S^n_\rho$ con $f(u) = \rho u$;

(d) $f : E \to F$, una tranformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita.

6. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ las funciones definidas por

$$f(x,y) = (x^2 - 2y, 4x^3y^2),$$
$$g(u,v) = (u^2v + v^2, u - 2v^3, v\exp(u)).$$

Encuentre la matriz de $f_{*(1,2)}$ y de $g_{*(u,v)}$ y calcule $g_{*(0,1)}(4\frac{\partial}{\partial u}\big|_{(0,1)} - \frac{\partial}{\partial v}\big|_{(0,1)})$.

7. Sea M una variedad de dimensión n. Sean $\pi : TM \to M$ la proyección natural y $v \in TM$. Calcular $\pi_{*v}(\frac{\partial}{\partial \overline{x}^i}|_v)$ si $(TU, \overline{x})$ es la carta de TM asociada a la carta (U, x) de $\pi(v)$.

Hassler Whitney
1907–1989, Estados Unidos