Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2012

Práctica 1: Variedades

1. Sea V un espacio vectorial real de dimensión $n \geq 1$ y sea $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Sea $\phi : \mathbb{R}^n \to V$ la función tal que $\phi(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n t_i v_i$.

(a) Hay una única topología que hace que ϕ sea un homeomorfismo, y esa topología no depende de la base $\mathscr{B}$ elegida.

(b) La estructura diferenciable determinada por el atlas $\mathscr{A} = \{\phi^{-1}\}$ sobre V no depende de la base $\mathscr{B}$ elegida.

2. (a) Si M es una variedad de dimensión m y $U \subseteq M$ es un abierto no vacío, entonces U tiene una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión m. Con respecto a esta estructura, la inclusión $U \hookrightarrow M$ es una función diferenciable.

(b) Si $n \geq 1$, el conjunto $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ de las matrices inversibles es una variedad diferenciable de dimensión n^2 de manera natural.

3. Muestre que el conjunto de vectores normales unitarios a una curva regular en $\mathbb{R}^3$ tiene una estructura natural de variedad diferenciable.

4. Construya explícitamente un atlas sobre los siguientes espacios topológicos:

(a) el cilindro $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$;

(b) el toro $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ factores}}$.

5. Muestre que los siguientes espacios son variedades diferenciales y determine sus dimensiones.

(a) $\mathsf{GL}(n, \mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$, el conjunto de las matrices complejas $n \times n$ inversibles;

(b) $\mathsf{SL}(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$, el conjunto de las matrices reales $n \times n$ de determinante 1;

(c) $\mathsf{SL}(n, \mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$, el conjunto de las matrices complejas $n \times n$ de determinante 1;

(d) $\mathsf{O}(n, \mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{R})$, el conjunto de las matrices reales $n \times n$ que son ortogonales;

(e) $\mathsf{U}(n, \mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$, el conjunto de las matrices complejas $n \times n$ que son unitarias;

6. Sea $M = \mathbb{R}$.

(a) Los conjuntos $\mathscr{A} = \{\mathsf{id} : M \to \mathbb{R}\}$ y $\mathscr{A}' = \{\phi : t \in M \mapsto t^3 \in \mathbb{R}\}$ son dos atlas sobre M que no son compatibles, de manera que los atlas maximales que los contienen son distintos y determinan variedades diferenciales $(M, \mathscr{A})$ y $(M, \mathscr{A}')$ distintas.

(b) Las variedades diferenciales $(M, \mathscr{A})$ y $(M, \mathscr{A}')$ son difeomorfas.

7. Sean M y N variedades de dimensiones m y n, respectivamente.

(a) El espacio producto $M \times N$ tiene una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión $m + n$, y las proyecciones $p_1 : M \times N \to M$ y $p_2 : M \times N \to N$ son funciones diferenciables.

(*b*) Si P es una variedad y $f : P \to M$ y $g : P \to N$ son funciones diferenciables, existe exactamente una función diferenciable $h : P \to M \times N$ tal que $p_1 \circ h = f$ y $p_2 \circ h = g$.

8. Si M es una variedad, las funciones $\mathrm{id} : M \to M$ y $\Delta : x \in M \mapsto (x, x) \in M \times M$ son diferenciables.

9. Las funciones

$$\mu : (A, B) \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \mapsto AB \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$$

e

$$\iota : A \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \mapsto A^{-1} \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$$

son diferenciables. Como $(\mathsf{GL}(n, \mathbb{R}), \mu, \iota)$ es un grupo, esto nos dice que $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ es un *grupo de Lie*.