Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2012
Segundo Parcial

Apellido y nombre: ....
L.U.: .... Hojas: ....

---

http://parcialgd.blogspot.com.ar/

1. Sea M una variedad y, como siempre, sea $\Omega^k(M)$ el espacio de las k-formas sobre M y $\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ la diferencial exterior.

(a) Si $\Omega_c^k(M) \subseteq \Omega^k(M)$ es el subespacio de las formas con soporte compacto, entonces $\mathrm{d}(\Omega_c^k(M)) \subseteq \Omega_c^{k+1}(M)$. Se sigue de esto que tenemos un complejo

$$\Omega_c^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega_c^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega_c^{n-1}(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega_c^n(M)$$

La cohomología de este complejo es por definición la *cohomología de de Rham de M con soporte compacto*, que escribimos $H_c^\bullet(M)$.

(b) Calcule $H_c^\bullet(\mathbb{R})$ y $H_c^\bullet(\mathbb{R}^2)$ «a mano.»

(c) Si $U \subseteq M$ es un abierto e $\iota : U \to M$ es la inclusión, hay exactamente una función $\iota_* : \Omega_c^\bullet(U) \to \Omega_c^\bullet(M)$ tal que para cada forma $\omega \in \Omega_c^k(U)$ es $\iota_*(\omega)|_U = \omega$ y $\operatorname{sop} \iota_*(\omega) \subseteq U$. Esta función ι_* es compatible con los diferenciales de $\Omega_c^\bullet(U)$ y de $\Omega_c^\bullet(M)$, en el sentido de que para cada $\omega \in \Omega_c^k(U)$ es $\mathrm{d}\,\iota_*(\omega) = \iota_*(\mathrm{d}\omega)$, y entonces ι_* induce un homomorfismo $\iota_* : H_c^\bullet(U) \to H_c^\bullet(M)$.

(d) Si $\{U, V\}$ es un cubrimiento abierto de M y las funciones las funciones del diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dr, "\iota_1"] & \\
U \cap V \arrow[ur, "\rho_1"] \arrow[dr, "\rho_2"'] & & M \\
 & V \arrow[ur, "\iota_2"'] &
\end{tikzcd}$$

son inclusiones, entonces

$$0 \longrightarrow \Omega_c^\bullet(U \cap V) \xrightarrow{\begin{pmatrix}\rho_{1*} \\ \rho_{2*}\end{pmatrix}} \Omega_c^\bullet(U) \oplus \Omega_c^\bullet(V) \xrightarrow{(\iota_{1*} \ -\iota_{2*})} \Omega_c^\bullet(M) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos. Pasando a la cohomología, obtenemos una sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris para la cohomología de de Rham con soporte compacto:

$$\cdots \longrightarrow H_c^k(U \cap V) \longrightarrow H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \longrightarrow H_c^k(M) \longrightarrow H^{k+1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

Es importante observar que en esta sucesión los espacios que aparecen están en un orden distinto que en la sucesión usual de Mayer-Vietoris.

2. Decimos que una variedad M de dimensión n es de *tipo finito* si posee un cubrimiento abierto finito $\mathscr{U} = \{U_i : 1 \leq i \leq m\}$ tal que cada intersección de elementos de $\mathscr{U}$ es o bien vacía o bien difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Muestre que la cohomología $H^\bullet(M)$ y la cohomología con soporte compacto $H_c^\bullet(M)$ tienen dimensión total finita.

3. Una variedad compacta conexa orientable y sin borde de dimensión positiva no es contráctil.

4. Sea $n \geq 1$ y $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto finito. Calcule la cohomología de de Rham de $M = \mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ e, idealmente, explicite formas que representen una base de $H^\bullet(M)$.

5. Sea G un grupo de Lie de dimensión n, sea $\mathfrak{g} = T_eG$ su álgebra de Lie y fijemos un producto interno $g_e : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ sobre $\mathfrak{g}$

(a) Hay una única métrica riemanniana g sobre G que es invariante a izquierda y cuyo valor en $e \in G$ es g_e.

(b) Si $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathfrak{g}$ y $X_1, \ldots, X_n$ son los campos tangentes a G invariantes a izquierda que extienden a los elementos de $\mathscr{B}$. Para cada i, j, es *constante* la función $g_{i,j} = g(X_i, X_j)$. Por otro lado, ya sabemos (porque el corchete de Lie de campos invariantes a izquierda es él mismo invariante a izquierda) que existen constantes $c_{i,j}^k$ tales que

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{i,j}^k X_k.$$

Calcule los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Cività de G con respecto a los campos $X_1, \ldots, X_n$ en términos de los escalares $c_{i,j}^k$ y $g_{i,j}$.

(c) Supongamos que $G = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ es el grupo de Lie con producto dado por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b)$$

para cada $(a, b), (c, d) \in G$, de manera que G es isomorfo de la forma evidente al grupo de matrices

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) : a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

El elemento neutro de G es $e = (1, 0)$, y su álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_eG$ se identifica de manera natural (porque G es un abierto de $\mathbb{R}^2$) con $\mathbb{R}^2$. Dotemos a G de su única métrica invariante a izquierda que en T_eG restringe al producto interno usual de $\mathbb{R}^2$. Encuentre todas las geodésicas pasan por e que pueda.

Calcule (las componentes en una carta del) tensor de curvatura $R(X, Y)Z$ sobre G y la *curvatura escalar*

$$K(p) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i,j \leq n} g(R(z_i, z_j)z_i, z_j)$$

para cada $p \in G$, con $\{z_1, \ldots, z_n\}$ una base ortonormal de T_pG.

6. Calcule la cohomología de de Rham de la botella de Klein.