Geometría Diferencial
Primer Cuatrimestre — 2012

Primer Parcial

Apellido y nombre: ....
L.U.: .... Hojas: ....

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable que tiene a 0 como un valor regular, y sea $M = f^{-1}(0)$. Muestre que M es orientable.

Solución. Sobre $\mathbb{R}^n$ tenemos un campo $X = \nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ y la forma de volumen usual $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$, así que podemos considerar la $(n-1)$-forma $\iota_X \omega$, de manera que para para $x \in \mathbb{R}^n$ y $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_x\mathbb{R}^n$ es $\iota_X \omega(v_1, \dots, v_n) = \omega(v_1, \dots, v_{n-1}, X_x)$. Sabemos que $\iota_X \omega$ es una forma diferenciable sobre $\mathbb{R}^n$.

Sea $q : M \to \mathbb{R}^n$ la inclusión, que es una inmersión, y consideremos la $(n-1)$-forma $\nu = q^*(\iota_X \omega) \in \Omega^{n-1}(M)$, de manera que para cada $x \in M$ y cada $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_xM$ es $\nu(v_1, \dots, v_n) = \omega(q_{*x}(v_1), \dots, q_{*x}(v_{n-1}), X_{q(x)})$.

Para terminar, bastará que probemos que ν es una forma de volumen sobre N. Sea $x \in M$ y sea $v_1, \dots, v_{n-1}$ una base de T_xM. Como q es una inmersión y $\nabla f_{q(x)}$ es no nulo y ortogonal al subespacio T_xM, el conjunto $\{q_{*x}(v_1), \dots, q_{*x}(v_{n-1}), X_{q(x)}\}$ es una base de $T_x\mathbb{R}^n$, así que $\nu(v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega(q_{*x}(v_1), \dots, q_{*x}(v_{n-1}), X_{q(x)}) \neq 0$. □

2. Una función $f : M \to N$ entre variedades es un difeomorfismo sii es biyectiva y localmente un difeomorfismo.

Solución. La necesidad de la condición es evidente, así que nos ocupamos solamente de su suficiencia. Si $x \in M$, existe un entorno abierto U_x de x en M tal que $f(U_x)$ es un abierto de N y la restricción $f_x = f|_{U_x} : U_x \to f(U_x)$ es un difeomorfismo. En particular, si $U \subseteq M$ es un abierto, entonces $f(U) = \bigcup_{x \in X} f(U \cap U_x)$ es un abierto de N porque para cada $x \in M$ es $U \cap U_x$ un abierto de U_x, f_x es abierta y $f(U_x)$ es un abierto de N. Vemos así que f es una función abierta, así que, como es continua y biyectiva, es un homeomorfismo. En particular, su función inversa $f^{-1} : N \to M$ es continua.

Sea $y \in N$. Existe $x \in M$ tal que $f(x) = y$, y $f_x : U_x \to f(U_x)$ es un difeomorfismo, así que su inversa $(f_x)^{-1} : f(U_x) \to U_x$ es diferenciable. Como $f(U_x)$ es un entorno abierto de y y $f^{-1}|_{f(U_x)} = (f|_x)^{-1}$, esto muestra que f^{-1} es diferenciable en y. Como y es arbitrario en N, entonces, vemos que f^{-1} es diferenciable y, en definitiva, que f es un difeomorfismo. □

3. Sea M una variedad, sea $x \in M$ y sea $C^\infty(M)$ la $\mathbb{R}$-álgebra de las funciones diferenciables sobre M.

(*a*) El conjunto I_x de las funciones $h \in C^\infty(M)$ que se anulan en todo un entorno de x es un ideal de $C^\infty(M)$.

Sea $R_x = C^\infty(M)/I_x$ la $\mathbb{R}$-álgebra cociente y para cada $h \in C^\infty(M)$ escribamos $[h]$ a la clase de h en R_x.

(*b*) El conjunto $\mathfrak{m}_x$ de las clases $[h]$ de R_x de las funciones $h \in C^\infty(M)$ tales que $h(x) = 0$ es un ideal de R_x y hay un isomorfismo $T_xM \to (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$.

Solución. Si $v \in T_xM$, entonces hay una función $\bar{v} : R_x \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{v}([h]) = v(h)$ para cada $h \in C^\infty(M)$; en efecto, esto es consecuencia de que si $h \in I_x$ entonces $v(h) = 0$. Si $h, h' \in C^\infty(M)$, entonces $\bar{v}([h] \cdot [h']) = h(x)\bar{v}([h']) + h'(x)\bar{v}([h])$. De esto se sigue inmediatamente que $\bar{v}(\mathfrak{m}_x^2) = 0$ y, en consecuencia, que $\bar{v}$ induce una función $\Phi(v) : \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\Phi(v)(\eta + \mathfrak{m}_x^2) = \bar{v}(\eta)$ para todo $\eta \in \mathfrak{m}_x$; se trata de una función lineal. De esta forma, obtenemos una función $\Phi : T_xM \to (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ y otra vez se trata claramente de una función lineal. Esta función es inyectiva: en efecto, si $v \in T_xM$ es no nulo, existe una función $h \in C^\infty(M)$ tal que $h(x) = 0$ y $v(h) = 1$, así que $[h] \in \mathfrak{m}_x$ y $\Phi(v)([h] + \mathfrak{m}_x^2) = v(h) = 1$, así que $\Phi(v) \neq 0$. Para terminar, mostremos que es sobreyectiva.

Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de M tal que $x \in U$ y $\phi(x) = 0$. Sean $\chi \in C^\infty(M)$ y $V \subseteq M$ un abierto tales que $x \in V \subseteq U$, $\operatorname{sop} \chi \subseteq U$ y $\chi|_V \equiv 1$. Sean $\phi_1, \dots, \phi_n : U \to \mathbb{R}$ las componentes de U. Existen funciones $\tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_n \in C^\infty(M)$ tales que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y cada $y \in M$ es

$$\tilde{\phi}_i(y) = \begin{cases} \chi(y)\phi_i(y), & \text{si } y \in U; \\ 0, & \text{si } y \in M \setminus \operatorname{sup} \chi. \end{cases}$$

Como $\tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_n$ se anulan en x, sus clases $[\tilde{\phi}_1], \dots, [\tilde{\phi}_n] \in R_x$ están en $\mathfrak{m}_x$.

Sea $\lambda \in (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ pongamos $\alpha_i = \lambda([\tilde{\phi}_i] + \mathfrak{m}_x^2)$ y sea $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}\big|_x$. Si $h \in C^\infty(M)$, el teorema de Taylor aplicado a la función $\chi \cdot (h \circ \phi^{-1})$ nos dice que existen funciones diferenciables $r_{i,j} : M \to \mathbb{R}$, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tales que

$$h = (1-\chi)h + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x(h)\, \tilde{\phi}_i + \sum_{i,j=1}^n r_{i,j}\tilde{\phi}_i\tilde{\phi}_j.$$

Notemos que $(1-\chi)h$ se anula en un entorno de x, así que en R_x es

$$[h] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x(h)\, [\tilde{\phi}_i] + \sum_{i,j=1}^n [r_{i,j}\tilde{\phi}_i][\tilde{\phi}_j],$$

y, como el último sumando está en $\mathfrak{m}_x^2$, es

$$\lambda([h] + \mathfrak{m}_x^2) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x(h)\, \lambda([\tilde{\phi}_i] + \mathfrak{m}_x^2) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x(h)\, \alpha_i = v(h) = \Phi(v)([h] + \mathfrak{m}_x^2).$$

Esto nos dice que $\Phi(v) = \lambda$, así que ϕ es sobreyectiva. □

4. Sean M y N variedades y sea $f : M \to N$ una función continua, de manera que tenemos una función $f^* : h \in C(N) \mapsto h \circ f \in C(M)$, que es un homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

(*a*) f es diferenciable sii $f^*(C^\infty(N)) \subseteq C^\infty(M)$.

(*b*) Si f es un difeomorfismo, entonces la restricción $f^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ es un isomorfismo.

†(*c*) La implicación recíproca a la de (*b*) es también cierta

Solución. (a) Si f es diferenciable y $h \in C^\infty(N)$, entonces sabemos que $h \circ f$ es diferenciable: esto nos dice que $f^*(C^\infty(N)) \subseteq C^\infty(M)$. Veamos la implicación recíproca.

Sea $x \in M$. Sea $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ una carta de N tal que $f(x) \in U$. Existe una función $\chi \in C^\infty(N)$ y un abierto $V' \subseteq N$ tales que $0 \leq \chi \leq 1$, $\operatorname{sop}\chi \subseteq V$, $f(x) \in V' \subseteq V$ y $\chi|_{V'} \equiv 1$. Hay una función diferenciable $\tilde{\psi} : N \to \mathbb{R}^n$ tal para cada $y \in N$ es

$$\tilde{\psi}(y) = \begin{cases} \chi(y)\psi(y), & \text{si } y \in V; \\ 0, & \text{si } y \in N \setminus \operatorname{sop}\chi. \end{cases}$$

Por hipótesis la composición $\tilde{\psi} \circ f : M \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable. Como f es continua, existe una carta $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V'$. La composición $\tilde{\psi} \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable, y como $f(U) \subseteq V'$, la elección de χ implica que, de hecho, $\tilde{\psi} \circ f \circ \phi^{-1} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Pero entonces la función $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : U \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable. Como esto es cierto cualquiera sea $x \in M$, esto muestra que f es una función diferenciable.

(b) Si f es un difeomorfismo, existe una función diferenciable $g : N \to M$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_N$ y $g \circ f = \mathrm{id}_M$. Sabemos que $f^*(C^\infty(N)) \subseteq C^\infty(M)$ y que $g^*(C^\infty(M)) \subseteq C^\infty(N)$, así que las funciones $f^* : C(N) \to C(M)$ y $g^* : C(M) \to C(N)$ se restringen a funciones $f^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ y $g^* : C^\infty(M) \to C^\infty(N)$. Como $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = \mathrm{id}_M^* = \mathrm{id}_{C^\infty(M)}$ y $g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = \mathrm{id}_N^* = \mathrm{id}_{C^\infty(N)}$, las funciones restringidas f^* y g^* son isomorfismos inversos entre $C^\infty(M)$ y $C^\infty(N)$.

(c) Supongamos ahora que f es diferenciable y que la función $f^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ es un isomorfismo. Mostremos primero que f es biyectiva.

- Sean x, $x' \in M$ tales que $f(x) = f(x')$ y supongamos que $x \neq x'$. Como las funciones diferenciables sobre M separan puntos, existe una función $g \in C^\infty(M)$ tal que $g(x) \neq g(x')$. Por otro lado, como f^* es un isomorfismo, existe $h \in C^\infty(N)$ tal que $g = f^*(h) = h \circ f$, y entonces $g(x) = h(f(x)) = h(f(x')) = g(x')$. Como esto es imposible, vemos que la hipótesis no puede cumplirse: esto es, que f es inyectiva.
- Sea ahora $y \in N$ y supongamos que $y \notin f(M)$. Sea $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ una carta de N tal que $y \in U$, y sean $\chi \in C^\infty(N)$ y $U' \subseteq N$ un abierto tales que $y \in U' \subseteq \overline{U'} \subseteq U$, $\overline{U'}$ es compacto, $0 \leq \chi \leq 1$, $\operatorname{sop}\chi \subseteq U$ y $\chi|_{U'} \equiv 1$. Hay una función diferenciable $h : N \setminus \{y\} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $z \in N$ es

  $$h(z) = \begin{cases} \chi(z)\|\phi(z) - \phi(y)\|^{-1}, & \text{si } z \in U \setminus \{y\}; \\ 0, & \text{si } z \in N \setminus \operatorname{sop}\chi. \end{cases}$$

  Como y no está en la imagen de f, la composición $h \circ f : M \to \mathbb{R}$ está bien definida y es diferenciable, y la hipótesis sobre f^* implica que existe $h' \in C^\infty(N)$ tal que $h \circ f = h' \circ f$. Sea $K = \sup\{|h'(z)| : z \in \overline{U'}\}$ —esto tiene sentido porque U' tiene clausura compacta— y sea $W = U' \cap \phi^{-1}(B_{1/K}(\phi(y)))$, que es un entorno abierto de y. Si $x \in M$ es tal que $f(x) \in W$, entonces

  $$K \geq |h'(f(x))| = |h(f(x))| = \chi(f(x))\|\phi(f(x)) - \phi(y)\|^{-1} > K.$$

  Esto es absurdo, así que vemos que $W \cap f(M) = \emptyset$.

  Ahora bien, como W es un abierto no vacío, existe una función diferenciable $\zeta : N \to \mathbb{R}$ no idénticamente nula y tal que $\operatorname{sop}\zeta \subseteq W$. Como $W \cap f(M) = \emptyset$, es $f^*(\zeta) = 0$: esto contradice la hipótesis de que f^* es una función inyectiva, y prueba que f debe ser necesariamente sobreyectiva.

En segundo lugar, veamos que f es abierta, de forma que se trata, de hecho, de un homeomorfismo:

- Sea $U \subseteq M$ un abierto y sea $x \in U$. Existe una función $g \in C^\infty(M)$ tal que $x \in \{z \in M : g(z) > 0\} \subseteq U$ y, como f^* es un isomorfismo, existe $h \in C^\infty(N)$ tal que $g = h \circ f$. Si $y \in N$ es tal que $h(y) > 0$, existe $x' \in M$ ta que $f(x') = y$ y entonces $g(x') = h(f(x')) = h(y) > 0$, de manera que $x' \in U$ e $y = f(x') \in f(U)$. Vemos así que el conjunto $\{y \in N : h(y) > 0\}$, que es un abierto de N que contiene a $f(x)$, está contenido en $f(U)$. Esto implica que $f(U)$ es un abierto de N.

Sea $x \in M$. Mostremos que $f_{*x} : T_xM \to T_{f(x)}N$ es un isomorfismo.

- Sea $v \in T_xM$ un vector no nulo, de manera que existe una función $g \in C^\infty(M)$ tal que $v(g) \neq 0$. Como f^* es un isomorfismo, existe $h \in C^\infty(N)$ tal que $g = f^*(h) = h \circ f$, y entonces $f_{*x}(v)(h) = v(h \circ f) = v(g) \neq 0$. Esto nos dice que $f_{*x}(v) \neq 0$ y, entonces, que la función $f_{*x} : T_xM \to T_{f(x)}N$ es inyectiva.
- Usando la notación del ejercicio **3**, la función $f^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ es tal que $f^*(I_{f(x)}) = I_x$; esto sigue inmediatamente de que f es un homeomorfismo. Vemos entonces que f^* induce un isomorfismo $\phi : R_{f(x)} \to R_x$ tal que $\phi([h]) = [h \circ f]$ para cada $h \in C^\infty(N)$. Otra vez, es claro que $\phi(\mathfrak{m}_{f(x)}) = \mathfrak{m}_x$ así que ϕ induce un isomorfismo $\bar\phi : \mathfrak{m}_{f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)}^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ que, transpuesto, nos da a su vez un isomorfismo $\bar\phi^* : (\mathfrak{m}_{f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)}^2)^* \to (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$. De acuerdo al ejercicio **3**, esto nos dice que $T_{f(x)}N \cong T_xM$ y, en particular, que ambos espacios vectoriales tienen la misma dimensión. Como $f_{*x} : T_xM \to T_{f(x)}N$ es inyectiva, concluimos así que es un isomorfismo, como queríamos.

El teorema de la función inversa nos dice ahora que f es localmente un difeomorfismo y el resultado del ejercicio **2** nos permite concluir que f es un difeomorfismo. $\square$

5. Si $f : M \to N$ es una función diferenciable entre variedades con dominio conexo y tal que para todo $x \in M$ es $f_{*x} = 0$, entonces f es constante.

6. Para cada $p \in S^2$, sea $\omega_p : T_pS^2 \times T_pS^2 \to \mathbb{R}$ tal que si v, $w \in T_pS^2$ es

$$\omega_p(v, w) = \langle p, v \times w\rangle,$$

con $\langle -, -\rangle$ el producto usual de $\mathbb{R}^3$, $\times$ el producto vectorial, e identificando T_pS^2 con un subespacio de $\mathbb{R}^3$, como siempre.

(a) Muestre que esto define una 2-forma $\omega \in \Omega^2(S^2)$ sobre la esfera y que se trata de una forma de volumen.

(b) Considere el campo vectorial $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ y la forma de volumen $\nu = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ usual sobre $\mathbb{R}^3$, y sea $j : S^2 \to \mathbb{R}^3$ la inclusión. Muestre que $\omega = j^*(\iota_X \nu)$.

(c) Calcule $\int_{S^2} \omega$.

Solución. (a) Como el producto vectorial $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es bilineal antisimétrico y la función $\langle p, -\rangle : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es lineal, es inmediato que para cada $p \in S^2$ la función $\omega_p : T_pS^2 \times T_pS^2 \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal antisimétrica sobre T_pS^2. Para mostrar que $\omega \in \Omega^2(S^2)$, entonces, basta que probemos que ω es diferenciable.

Sea $U = \{(x, y, z) \in S^2 : z > 0\}$, que es un abierto de S^2 y $\phi : (x, y, z) \in U \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$, que es una carta de S^2 que tiene a $\phi^{-1} : (x, y) \in B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \in S^2$ como función inversa. En las coordenadas de esta carta es

$$\frac{\partial}{\partial x} = (1, 0, -x(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}), \qquad \frac{\partial}{\partial y} = (0, 1, -y(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}), \tag{1}$$

de manera que si $(x,y) \in B_1(0)$ y $p = \phi^{-1}(x,y)$, es

$$
\begin{aligned}
\omega_p\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p\Big) &= \Big\langle \phi^{-1}(x,y), \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p \times \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p \Big\rangle \\
&= \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ \sqrt{1-x^2-y^2} & -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{vmatrix} \qquad (2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.
\end{aligned}
$$

Como esto es una función diferenciable de $(x,y) \in B_1(0)$, vemos que $\omega|_U$ es diferenciable. Claramente podemos cubrir a S^2 por seis cartas de la misma forma, y en cada una de ellas un cálculo similar funciona, así que esto prueba que ω es diferenciable.

(b) Para probar que $\omega = j^*(\iota_X \nu)$, basta mostrar que estas dos formas son iguales sobre cada una de las seis cartas a las que hicimos referencia en el ejercicio anterior. Por simetría, será suficiente hacerlo para una de ellas, la que describimos allí explicitamente. Si $(x,y) \in B_1(0)$ y $p = \phi^{-1}(x,y)$, es

$$
(j^*(\iota_X \nu))_p\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p\Big) = (\iota_X \omega)_{j(p)}\Big(j_{*p}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p\Big), j_{*p}\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p\Big)\Big)
$$

y, de acuerdo a (1), esto es

$$
\begin{aligned}
&= (\iota_X \nu)_{j(p)}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{j(p)} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{j(p)}, \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{j(p)} - \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{j(p)}\Big) \\
&= \nu_{j(p)}\Big(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \sqrt{1-x^2-y^2}\frac{\partial}{\partial z}, \\
&\qquad \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{j(p)} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{j(p)}, \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{j(p)} - \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{j(p)}\Big),
\end{aligned}
$$

y de acuerdo a las definiciones el último miembro de esta cadena de igualdades es igual al determinante (2). Esto nos dice que $\omega|_U = j^*(\iota_X \nu)|_U$, que es lo que queríamos.

(c) Sea B^3 la bola cerrada de $\mathbb{R}^3$, de manera que $\partial B^3 = S^2$. La forma ν se restringe a una forma de volumen $\bar\nu = \nu|_{B^3} \in \Omega^3(B^3)$ y, si $\bar j : S^2 \to S^3$ es la inclusión y $\bar X = X|_{B^3} \in \mathfrak{X}(B^3)$, vale, por la misma razón que antes, que $\omega = \bar j^*(\iota_X \bar\nu)$. Entonces

$$
\int_{S^2} \omega = \int_{\partial B^3} \bar j^*(\iota_{\bar X} \bar\nu) = \int_{B^3} \mathrm{d}\iota_{\bar X} \bar\nu = \int_{B^3} \mathscr{L}_{\bar X} \bar\nu
$$

porque $\mathrm{d}\iota_{\bar X}\bar\nu + \iota_{\bar X}\mathrm{d}\bar\nu = \mathscr{L}_{\bar X}\bar\nu$ y $\mathrm{d}\bar\nu = 0$. Como $\mathscr{L}_{\bar X}$ es una derivación, es

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\bar X}\bar\nu &= \mathscr{L}_{\bar X}(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) \\
&= \mathscr{L}_{\bar X}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}x \wedge \mathscr{L}_{\bar X}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathscr{L}_{\bar X}\mathrm{d}z \\
&= \mathrm{d}(\bar X x) \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}(\bar X y) \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}(\bar X z).
\end{aligned}
$$

Es $\bar X x = x$, de manera que $\mathrm{d}(\bar X x) = \mathrm{d}x$, y lo mismo sucede con las otras variables, así que $\mathscr{L}_{\bar X}\bar\nu = 3\nu$ y $\int_{S^2}\omega = 3\int_{B^3}\nu$. Esta última integral evidentemente calcula el volumen de B^3 con respecto a su forma de volumen usual, esto es, $\frac{4}{3}\pi$, así que

$$
\int_{S^2} \omega = 4\pi.
$$

Esta es la integral que queríamos. □