TEORÍA DE ÁLGEBRAS
Segundo Cuatrimestre — 2012

Práctica 2: Producto tensorial

1. Muestre que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

2. Sea A un anillo y M_A y ${}_AM$ A-módulos. Muestre que $M \otimes_A N$ es un $\mathsf{End}_A(M)$-$\mathsf{End}_A(N)$-bimódulo.

3. Sean A y B anillos y M_A, ${}_AN_B$ y ${}_BP$ módulos. Muestre que hay un isomorfismo natural

$$M \otimes_A (N \otimes_B P) \cong (M \otimes_A N) \otimes_B P.$$

4. Sea A un anillo conmutativo, $\mathfrak{a} \subset A$ un ideal y M un A-módulo. Muestre que hay un isomorfismo natural $A/\mathfrak{a} \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$.

5. Sea A un anillo, M_A y ${}_AN$ módulos y supongamos que $M = \sum_{i \in I} M_i$ es suma de una familia de submódulos $\{M_i\}_{i \in I}$. Si $M_i \otimes_A N = 0$ ara todo $i \in I$, entonces $M \otimes_A N = 0$.

6. Sea A un anillo y M un A-módulo playo. Si $N \subset M$ es un sumando directo, entonces N es playo.

7. Si A es un anillo conmutativo y M, N son A-módulos playos, entonces $M \otimes_A N$ es un A-módulo playo.

8. Sea A un anillo y $S \subset A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado.

(a) Si M es un A-módulo izquierdo, entonces hay un isomorfismo $A_S \otimes_A M \cong M_S$.
(b) El A-módulo derecho A_S es playo.

9. Sea A un anillo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Todo A-módulo a izquierda es playo.
(ii) Todo A-módulo a derecha es playo.
(iii) Para todo $a \in A$, existe $x \in A$ tal que $a = axa$.
(iv) Todo ideal izquierdo principal está generado por un idempotente.
(v) Todo ideal derecho principal está generado por un idempotente.

10. *Producto tensorial de álgebras.* Sea k un cuerpo y sean A y B k-álgebras. Muestre que $A \otimes_k B$ es un álgebra de forma tal que el producto está dado por

$$a \otimes b \cdot a' \otimes b = (aa') \otimes (bb').$$

11. Sea k un cuerpo, A una k-álgebra y n, $m \in \mathbb{N}$. Muestre que hay isomorfismos naturales de álgebras $A[X] \cong k[X] \otimes_k A$, $\mathsf{M}_n(A) \cong \mathsf{M}_n(k) \otimes_k A$ y $\mathsf{M}_{nm}(A) \cong \mathsf{M}_n(A) \otimes_k \mathsf{M}_m(A)$.

Hassler Whitney
1907–1989, Estados Unidos-Suiza.

Whitney fue el primero en introducir explícitamente el producto tensorial de grupos abelianos, en *Tensor Products of Abelian Groups*, Duke Math. J. **4**, 495–528 (1938).