# TEORÍA DE ÁLGEBRAS
## Segundo Cuatrimestre — 2012

## Parcial

---

APELLIDO Y NOMBRE: ..............................................................

L.U.: ................................ HOJAS: ................................

---

**1.** Para las álgebras $\Bbbk S_3$ y $\Bbbk A_4$, con $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 2 o 3: describa los módulos proyectivos indescomponibles y decida si son básicas y, en caso de no serlo, calcule el álgebra básica asociada. Construya el quiver ordinario y dé una presentación admisible.

**2.** Sea $\Bbbk$ un cuerpo algebraicamente cerrado de característica nula. Si $q \in \Bbbk$ es una raíz cúbica primitiva de la unidad, sea $A$ el cociente del álgebra libre $\Bbbk\langle x, y\rangle$ por el ideal generado por los elementos

$$x^3 - 1, \qquad y^2, \qquad yx - qxy.$$

($a$) Muestre que el conjunto $\mathscr{B} = \{x^i y^j : 0 \leq i < 3, 0 \leq j < 2\}$ es una base de $A$.

($b$) Muestre que hay exactamente 3 módulos simples y que los tres tienen dimensión 1.

($c$) Determine el radical de $A$.

($d$) Encuentre el quiver ordinario de $A$ y una presentación admisible.

†($e$) Describa todos los módulos indescomponibles de dimensión finita para $A$.

†($f$) Usando las mismas ideas, generalice los resultados obtenidos para el álgebra $A(n, m, q)$, con $n$, $m \geq 2$ y $q \in \Bbbk$ una raíz $n$-ésima primitiva de la unidad, cociente del álgebra libre $\Bbbk\langle x, y\rangle$ por el ideal generado por los elementos $x^n - 1$, $y^m$, $yx - qxy$.

*Sugerencia.* Una forma de verificar que el conjunto $\mathscr{B}$ es linealmente independiente, es mostrar que hay un morfismo de álgebras $\phi : A \to M_6(\Bbbk)$ tal que

$$\phi(x) = \left(\begin{array}{cc:cc:cc} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ \hdashline & & q & & & \\ & & & q & & \\ \hdashline & & & & q^2 & \\ & & & & & q^2 \end{array}\right), \qquad \phi(y) = \left(\begin{array}{cc:cc:cc} & & & & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ \hdashline & & 0 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & & \end{array}\right),$$

y observar que bajo ese morfismo la imagen de $\mathscr{B}$ es linealmente independiente. Para las demás afirmaciónes, es útil la observación de que la subálgebra $C \subseteq A$ generada por $x$ es isomorfa al álgebra de grupo $\Bbbk C_3$ del grupo cíclico de orden 3.

**3.** Sea $A$ un anillo.

($a$) Un ideal izquierdo $I \subseteq A$ es un sumando directo de $A$ sii existe un idempotente $e \in A$ tal que $I = Ae$.

($b$) Si $I \subseteq A$ es un ideal izquierdo *minimal* tal que $I^2 \neq 0$, entonces $I$ es un sumando directo de $A$.

*Sugerencia.* La hipótesis implica que existe $x \in I$ tal que $I = Ix$, y entonces que existe $e \in I$ tal que $ex = x$. Si $e \neq e^2$, entonces $R(e - e^2) = I \ni e$ y de esto se deduce que $x = 0$.

Estas dos afirmaciones implican que *un ideal izquierdo minimal $I \subseteq A$ es un sumando directo de $A$ sii $I^2 \neq 0$.*

($c$) Si $A$ es artiniano a izquierda, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

($i$) $A$ es semisimple.
($ii$) $A$ no contiene ningún ideal izquierdo nilpotente no nulo.
($iii$) $A$ no contiene ningún ideal izquierdo no nulo que sea *nil*, esto es, tal que todos sus elementos son nilpotentes.
($iv$) $A$ no contienen ningún ideal izquierdo no nulo con cuadrado nulo.
($v$) Si $x \in A$, entonces $xAx = 0$ si y solamente si $x = 0$.

**4.** Sea $R$ un anillo conmutativo y $A$ una $R$-álgebra separable. Si $I \subseteq A$ es un ideal, entonces $A/I$ es separable y que el centro de $\mathscr{Z}(A/I)$ es

$$\mathscr{Z}(A/I) \cong \frac{\mathscr{Z}(A) + I}{I}.$$

De un ejemplo para mostrar que este último isomofismo puede ser falso si $A$ no es separable.

**5.** Sea $\Bbbk$ un cuerpo. El álgebra $M_n(\Bbbk)$ contiene una subalgebra isomorfa a $M_m(k)$ sii $m \mid n$.