Teoría de Álgebras
Segundo Cuatrimestre — 2012

Parcial

Apellido y nombre: ....
L.U.: .... Hojas: ....

El grupo de Brauer de un cuerpo

Fijemos un cuerpo k y escribamos $\otimes$ en lugar de $\otimes_k$. Si A es una k-álgebra, decimos que A es *central* si $\mathscr{Z}(A) = k$ y decimos que A es *simple* si no posee ideales biláteros propios no nulos. Recordemos, además, que si A y B son k-álgebras, entonces existe una única estructura de k-álgebra sobre el k-espacio vectorial $A \otimes B$ tal que manera que

$$a \otimes b \cdot a' \otimes b' = aa' \otimes bb', \qquad \forall a, a' \in A,\ b, b' \in B.$$

1.1. Si $x \in A \otimes B \setminus 0$, llamamos *rango de* x al menor $n \in \mathbb{N}$ tal que existe una escritura

$$x = a_1 \otimes b_1 + \cdots + a_n \otimes b_n$$

con $a_1, \ldots, a_n \in A$ y $b_1, \ldots, b_n \in B$.

Muestre que si $x \in A \otimes B \setminus 0$ tiene rango n y $a_1, \ldots, a_n \in A$ y $b_1, \ldots, b_n \in B$ son tales que $x = a_1 \otimes b_1 + \cdots + a_n \otimes b_n$, entonces el conjunto $\{b_1, \ldots, b_n\}$ es k-linealmente independiente en B.

1.2. Sea A una k-álgebra central. Para toda k-álgebra B, hay un isomorfismo $\mathscr{Z}(A \otimes B) \cong \mathscr{Z}(B)$. ■ En particular, si B también es central, la k-álgebra $A \otimes B$ es central.

1.3. Si A y B son k-álgebras centrales simples, entonces $A \otimes B$ es simple.

Sugerencia. Suponga que $I \lhd A \otimes B$ es un ideal bilátero no nulo en $A \otimes B$ y considere un elemento $x \in I \setminus 0$ no nulo de rango mínimo en $I \setminus 0$. Digamos que x tiene rango n y que $a_1, \ldots, a_n \in A$ y $b_1, \ldots, b_n \in B$ son tales que $x = a_1 \otimes b_1 + \cdots + a_n \otimes b_n$.

1. Como A es simple, $Aa_1A = A$, así que existe un conjunto finito J y elementos $l_j, r_j \in A$ para $j \in J$ tales que $\sum_{j \in J} l_j a_1 r_j = 1_A$.
2. Sea $x' = \sum_{j \in J} (l_j \otimes 1_B) \cdot x \cdot (r_j \otimes 1_B)$. Es $x' \in I$ y, por otro lado, para todo $a \in A$, $x' \cdot a \otimes 1_B = a \otimes 1_B \cdot x'$. Usando que A es central, muestre que esto implica que existe $b \in B$ tal que $x' = 1_A \otimes b$.
3. Usando la simplicidad de B, ahora, concluya que $1 \otimes 1 \in I$, de manera que $I = A \otimes B$.

1.4. Si A es una k-álgebra central simple, entonces su álgebra opuesta A^{op} también es central simple.

1.5. Sea A una k-álgebra. Si $a, b \in A$, consideremos la aplicación k-lineal

$$\mu_{a,b} : x \in A \mapsto axb \in A.$$

Muestre que hay un homomorfismo de k-álgebras $\phi : A \otimes A^{\mathsf{op}} \to \mathsf{End}_k(A)$ tal que

$$\phi(a \otimes b) = \mu_{a,b}.$$

Si A es central simple y tiene dimensión finita, entonces ϕ es un isomorfismo.

1.6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la k-álgebra $\mathsf{M}_n(k)$ es central simple.

1.7. Si A y B son k-álgebras centrales simples de dimensión finita, decimos que A y B son *similares* y escribimos $A \sim B$ si existen m, $n \in \mathbb{N}$ y un isomorfismo de k-álgebras

$$A \otimes \mathsf{M}_m(k) \cong B \otimes \mathsf{M}_n(k).$$

Muestre que la relación de similaridad es una relación de equivalencia sobre la clase de las k-álgebras centrales simples de dimensión finita.

Observe que $k \sim \mathsf{M}_n(k)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.8. Si A, A', B, B' son k-álgebras centrales simples de dimensión finita y $A \sim A'$ y $B \sim B'$, entonces $A \otimes B \sim A' \otimes B'$.

1.9. Sea $\mathsf{Br}(k)$ el conjunto de las clases de equivalencia de k-álgebras centrales simples de dimensión finita con respecto a la relación de similaridad. Si A es una tal álgebra, notemos $[A] \in \mathsf{Br}(k)$ a su clase de equivalencia.

Entonces $\mathsf{Br}(k)$ es un grupo conmutativo con respecto a la operación

$$[A] \cdot [B] = [A \otimes B].$$

El elemento neutro es $[k]$. Llamamos a $\mathsf{Br}(k)$ el *grupo de Brauer* de k.

1.10. Recuerde que una k-álgebra simple de dimensión finita es semisimple —esto fue visto en teoría. Muestre que si $\alpha \in \mathsf{Br}(k)$, existe una k-álgebra central de división de dimensión finita sobre k tal que $\alpha = [D]$. Además, si D' es otra tal álgebra, entonces $[D] = [D']$ sii $D \cong D'$.

Así, vemos que hay una biyeccón entre as k-álgebras de división centrales y el conjunto $\mathsf{Br}(k)$.

1.11. Muestre que:

(a) Si k es algebraicamente cerrado, entonces $\mathsf{Br}(k) = 0$.

(b) Es $\mathsf{Br}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) Si k es un cuerpo finito, entonces $\mathsf{Br}(k) = 0$.

Álgebras autoinyectivas

Si A es una k-álgebra de dimensión finita, sea A^{op} su álgebra opuesta y $\mathsf{mod}A$ la categoría de A-módulos izquierdos finitamente generados; podemos identifica a la categoría $\mathsf{mod}A^{o}p$ con la categoría de los A-módulos *derechos* finitamente generados.

2.1. si $M \in \mathsf{mod}A$, entonces $D(M) = \hom_k(M, k)$ puede hacerse de forma natural un A-módulo derecho, y si $f : M \to N$ es un morfismo de A-módulos izquierdos, la aplicación transpuesta $D(f) : D(N) \to D(M)$ es un morfismo de A-módulos derechos. Obtenemos de esta forma un functor *contravariante* $D : \mathsf{mod}A \to \mathsf{mod}A^{\mathsf{op}}$. Por supuesto, procediendo de la misma manera pero simetricamente, obtenemos un functor $D^{\mathsf{op}} : \mathsf{mod}A^{\mathsf{op}} \to \mathsf{mod}A$.

2.2. Los functores D y D^{op} son equivalencias de categorías inversas. Esto es, existen isomofismos naturales $D^{\mathsf{op}} \circ D \cong \mathsf{id}_{\mathsf{mod}A}$ y $D \circ D^{\mathsf{op}} \cong \mathsf{id}_{\mathsf{mod}A^{\mathsf{op}}}$.

2.3. Si $\operatorname{proj} A$ e $\operatorname{inj} A$ denotan las subcategorías plenas de $\operatorname{mod} A$ generadas por los A-módulos projectivos e inyectivos, respectivamente, entonces $D(\operatorname{proj} A) \subseteq \operatorname{proj} A^{\mathrm{op}}$ y $D(\operatorname{inj} A) \subseteq \operatorname{proj}^{\mathrm{op}}$, de manera que, a partir de D y D^{op} obtenemos por restricción functores $D : \operatorname{proj} A \to \operatorname{inj} A^{\mathrm{op}}$ y $D : \operatorname{inj} A \to \operatorname{proj} A^{\mathrm{op}}$. Estos functores son equivalencias contravariantes.

2.4. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) el A-módulo derecho A es inyectivo;
(ii) $\operatorname{proj} A = \operatorname{inj} A$;
(iii) $\operatorname{proj} A^{\mathrm{op}} = \operatorname{inj} A^{\mathrm{op}}$;
(iv) el A-módulo izquierdo A es inyectivo.

Cuando éstas se cumplen, decimos que el álgebra A es *autoinyectiva*.

2.5. El espacio vectorial $D(A) = \hom_k(A, k)$ es un A-bimódulo de forma natural. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Existe una forma k-bilineal no degenerada $(-,-) : A \times A \to k$ tal que

$$(ab, c) = (a, bc)$$

para toda elección de a, b, $c \in A$.
(ii) Existe una forma lineal $\phi : A \to k$ tal que $\ker \phi$ no contiene ningún ideal derecho no nulo de A.
(iii) Hay un isomorfismo $\theta : A \to D(A)$ de A-módulos derechos.
(iv) Existe una forma lineal $\phi : A \to k$ tal que $\ker \phi$ no contiene ningún ideal izquierdo no nulo de A.
(v) Hay un isomorfismo $\theta : A \to D(A)$ de A-módulos izquierdos.

Cuando se satisfacen estas condiciones, decimos que A es un álgebra *de Frobenius*.

2.6. (a) Muestre que toda álgebra de Frobenius es autoinyectiva.

(b) Sea Q el quiver

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

y a $A = kQ/(\alpha\beta, \beta\alpha)$. Entonces A es un álgebra con radical cuadrado nulo que es autoinyectiva. Sean $P_1 = e_1 A$ y $P_2 = e_2 A$ los proyectivos indescomponibles correspondientes a los vértices 1 y 2 del quiver, y sea $B = \operatorname{End}_A(P_1 \oplus P_1 \oplus P_2)$. Muestre que B es un álgebra de dimensión 9 que es autoinyectiva pero no de Frobenius.

†(c) Es posible probar también que toda álgebra *básica* autoinyectiva es de Frobenius.

2.7. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Hay una forma k-bilineal simétrica $(-,-) : A \times A \to A$ tal que

$$(ab, c) = (a, bc)$$

para toda elección de a, b, $c \in A$.

(ii) Hay una forma lineal $\phi : A \to k$ tal que $\phi(ab) = \phi(ba)$ para cada a, $b \in A$ y tal que $\ker\phi$ no contiene ningún ideal izquierdo ni derecho.

(iii) Hay un isomorfismo $\theta : A \to D(A)$ de *A-bimódulos*.

Cuando se cumplen estas condiciones, decimos que el álgebra A *simétrica*.

2.8. (a) Si A es un álgebra de Frobenius y $(-,-) : A \times A \to k$ es una forma k-bilineal no degenerada y asociatitiva, existe un único automorfismo $\nu : A \to A$ de álgebras tal que

$$(a,b) = (b, \nu(a))$$

para cada a, $b \in A$. Llamamos a ν el *automorfismo de Nakayama* de A. Si A es simétrica, entonces $\nu = \mathrm{id}_A$.

(b) ¿Qué relación hay entre los automorfismos de Nakayama de A asociados a dos formas k-bilineales no degeneradas y asociativas distintas?

2.9. (a) Si $A = k[X]/(X^{n+1})$, entonces A es un álgebra local simétrica.

(b) Si G es un grupo finito y kG es el álgebra de grupo de G, entonces hay una unica forma k-bilineal $(-,-) : A \times A \to A$ tal que

$$(g,h) = \delta_{gh^{-1},e}$$

si g, $h \in G$, y se trata de una forma no degenerada, asociativa y simétrica. Así, kG es un álgebra simétrica.

2.10. Sea A álgebra arbitraria, sea $D(A) = \hom_k(A,k)$ dotado de su estructura usual de A-bimódulo, y consideremos el espacio vectorial $T(A) = A \oplus D(A)$. Si definimos un producto sobre $T(A)$ de manera que

$$(a,\phi) \cdot (b,\psi) = (ab, a\psi + \phi b)$$

para cada (a,ϕ), $(b,\psi) \in T(A)$, entonces $T(A)$ deviene una k-álgebra asociativa, a la que llamamos la *extensión trivial* de A.

Hay una forma k-bilineal $(-,-) : T(A) \times T(A) \to k$ tal que

$$((a,\phi),(b,\psi)) = \phi(b) + \psi(a)$$

para cada (a,ϕ), $(b,\psi) \in T(A)$, y esta forma es simérica, asociativa, y no degenerada. Vemos así que $T(A)$ es un álgebra simétrica.

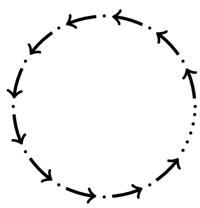
El subespacio $D(A)$ es un ideal bilátero de $T(A)$ y $T(A)/D(A) \cong A$. Esto muestra que toda álgebra de dimensión finita es cociente de un álgebra simétrica.

2.11. Sea Q el quiver

$$\alpha \circlearrowleft \bullet \circlearrowright \beta$$

y, si $\lambda \in k$, consideremos el ideal $I_\lambda = (\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta - \lambda\beta\alpha)$ del álgebra de caminos kQ. Entonces el cociente $A_\lambda = kQ/I_\lambda$ es un álgebra de Frobenius de dimensión 4 que es simétrica sii $\lambda = 1$.

2.12. Sean $n \geq 1$ y $m \geq 2$, sea Q_n el quiver con n vértices



y sea I_m el ideal del álgebra de caminos kQ_n generado por todos los caminos de longitud m. Determine si el álgebra $A_{n,m} = kQ_n/I_m$ es autoinyectiva, de Frobenius y/o simétrica. Cuando esto tenga sentido, describa el automorfismo de Nakayama de $A_{n,m}$.

2.13. Si M es una variedad compacta y orientable, entonces su álgebra de cohomología de de Rham $H^\bullet(M)$ es un álgebra de Frobenius.