Álgebra lineal
Primer Cuatrimestre — 2011

Práctica 8: Forma normal de Jordan

1. Determinar la forma normal de Jordan y una base de Jordan para las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. ¿Cuántas clases de semejanza hay de matrices en $M_8(\mathbb{C})$ cuyo polinomio minimal es x^3? ¿Y en $M_8(\mathbb{R})$?.

3. ¿Para qué valores de n es cierto el siguiente enunciado?

> Dos endomorfismos nilpotentes de $\mathbb{C}^n$ con el mismo polinomio minimal y con el mismo rango son semejantes.

4. Hallar una base en la que se realice la forma normal de Jordan, y la forma de Jordan, de la matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ con

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \le j; \\ 1 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

5. Decidir si existen endomorfismos tales que

(a) $f \in \mathsf{End}(\mathbb{C}^8)$, nilpotente, y

$$(\mathsf{rk}\, f, \mathsf{rk}\, f^2, \mathsf{rk}\, f^3, \mathsf{rk}\, f^4, \mathsf{rk}\, f^5) = (6, 4, 3, 1, 0);$$

(*b*) $f \in \mathsf{End}(\mathbb{C}^{16})$, $m_f = X^5$, y

$$(\mathsf{rk}\, f, \mathsf{rk}\, f^2, \mathsf{rk}\, f^3, \mathsf{rk}\, f^4, \mathsf{rk}\, f^5) = (9,5,3,1,0).$$

¿Cuántas clases de semejanza hay?

6. Sea $f \in \mathsf{End}(\mathbb{R}^3)$ el endomorfismo que en la base canónica tiene matriz $\begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -10 & 0 & 4 \\ 15 & -3 & -5 \end{pmatrix}$. Factorizar su polinomio característico, y escribir a 1 como combinación polinomial de los factores. Determinar proyectores sobre los espacios $V^p = \{v \in \mathbb{R}^3 : \exists m : p^m(f)(v) = 0\}$ para cada uno de los factores del característico.

7. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado. Si $\lambda \in k$, sea $V_\lambda = \{v \in V : \exists m : (f-\lambda)^m(v) = 0\}$, y sea $V_\lambda^n = \{v \in V : (f-\lambda)^n(v) = 0\}$. Sea $h \in k[X]$.

(*a*) $\ker h(f)$ y $\mathsf{im}\, h(f)$ son f-invariantes.

(*b*) Si $\lambda \in k$ es raiz de h, entonces $V_\lambda^1 \subset \ker h(f)$.

(*c*) Si $\lambda \in k$ es raiz de h de multiplicidad n, entonces $V_\lambda^n \subset \ker h(f)$.

(*d*) Si $\lambda \in k$ no es raiz de h, entonces $V_\lambda^1 \subset \mathsf{im}\, h(f)$, y, de hecho, es $V_\lambda \subset \mathsf{im}\, h(f)$.

8. Determinar para que valores de $n \in \mathbb{N}$ es cierto que

Dos matrices en $M_n(\mathbb{C})$ son semejantes sii tienen el mismo polinomio característico y minimal.

9. Sea $J = J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ un bloque de Jordan.

(*a*) Calcular J^m.

(*b*) Calcular $f(J)$ si $f \in \mathbb{R}[X]$.

(*c*) Sea $\sum_{i \geq 0} a_i x^i$ una serie de potencias de radio de convergencia más grande que $|\lambda|$. Mostrar que $\sum_{i \geq 0} a_i J^i$ converge y determinar su suma en término de las derivadas de la función suma de la serie original.

(*d*) Calcular e^J, $\sin J$, $\cos J$.

(*e*) Calcular e^A, $\sin A$, $\cos A$ para algunas de las matrices del ejercicio 1.

10. (*a*) Sea $N \in M_3(\mathbb{C})$ nilpotente, y sea $A = 1 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$. Mostrar que A es una raíz cuadrada de $1 + N$.

(*b*) Desarrollando la función $(1+x)^{1/2}$ en su serie de Taylor, muestre que toda matriz de la forma $1 + N$ con N nilpotente admire raices cuadradas. ¿Cuántas?

(c) Muestre que un endomorfismo $f \in \mathsf{End}(V)$ nilpotente de índice de nilpotencia máximo no posee raices cuadradas.

11. Si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ conmutan, $e^{A+B} = e^A e^B$.

12. Sea $f \in \mathsf{End}(V)$ con $\dim V = 6$ de polinomio minimal X^6, y supongamos que $\{v_1, \ldots, v_6\}$ es base de Jordan para f. Encontrar la forma de Jordan para f^2, f^3, f^4 y f^5, y bases que las realicen.

13. Sean $x, y \in k^n$, y $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ tal que $a_{ij} = x_i y_j$. Mostrar que si $x \neq 0$ e $y \neq 0$ el rango de A es 1, determinar sus autovalores, y mostrar que:

$$A \text{ es diagonalizable si y solo si } yx^t \neq 0$$

14. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, y $f \in \mathsf{End}(V)$ con V un espacio vectorial de dimensión finita. Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m = Id$, f es diagonalizable.

15. Sea $J = J(\lambda, n)$ un bloque de Jordan de $n \times n$ con autovalor $\lambda \in k$, y sea $C(J) = \{A \in M_n(k) : AJ = JA\}$. Muestre que

$$C(J) = \{p(J) : p \in k[X]\}.$$

Marie Ennemond Camille Jordan
1838 - 1922

Jordan estaba muy bien considerado por sus contemporáneos por su trabajo en álgebra, teoría de grupos y teoría de Galois.