Álgebra lineal
Primer Cuatrimestre — 2011

Práctica 7: Diagonalización

1. (*a*) Mostrar que si $p, q \in k[X]$ son coprimos, $f \in \mathrm{End}(V)$, y $v \in V$ son tales que $p(f)(v) = q(f)(v) = 0$, entonces $v = 0$.

(*b*) ¿Es cierto que si $p, q \in k[X]$ y $f \in \mathrm{End}(V)$ son tales que $p(f)q(f) = 0$, entonces $p(f) = 0$ ó $q(f) = 0$?

(*c*) Muestre que existe $p \in k[X]$ tal que hay más de $\deg p$ matrices $A \in M_n(k)$ tales que $p(A) = 0$.

Solución. (*a*) Si p, $q \in k[X]$ son coprimos, existen α, $\beta \in k[X]$ tales que $\alpha p + \beta q = 1$. Sea $v \in V$ tal que $p(f)(v) = q(f)(v) = 0$. Entonces

$$v = \mathrm{id}_V(v) = \big(\alpha(f)p(f) + \beta(f)q(f)\big)(v) = 0.$$

(*b*) Sea $V = k^2$ y sea $f : V \to V$ el endomorfismo que tiene matriz $[f] = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ con respecto a la base canónica. Si $p(X) = q(X) = X$, entonces un cálculo directo muestra que $p(f)q(f) = 0$ y, sin embargo, $p(f) \neq 0$ y $q(f) \neq 0$.

(*c*) Si V es un espacio vectorial sobre k y $W \subseteq V$ es un subespacio, sabemos que existe al menos un proyector $f : V \to V$ tal que $\operatorname{im} f = W$. Entonces f satisface el polinomio $X^2 - X$. Si $\dim V > 1$, entonces V tiene al menos tres subespacios distintos, así que $X^2 - X$ tiene al menos tres soluciones en $\mathrm{End}(V)$. □

2. Mostrar que si $A, B \in M_n(k)$ son semejantes, entonces $\chi_A = \chi_B$ y que $m_A = m_B$. ¿Vale la recíproca?

Solución. Por hipótesis, existe $C \in \mathrm{GL}_n(k)$ tal que $A = CBC^{-1}$. Entonces

$$\begin{aligned}\chi_A(t) &= \det(tId - A) = \det C(tId - A)C^{-1} = \det(tId - CAC^{-1}) = \det(tId - B) \\ &= \chi_B(t).\end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que $A^i = CB^iC^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Si $m_B(X) = \sum_{i=0}^{r} \beta_i X^i$, entonces

$$m_B(A) = \sum_{i=0}^{r} \beta_i A^i = \sum_{i=0}^{r} \beta_i CB^iC^{-1} = C\Big(\sum_{i=0}^{r} \beta_i B^i\Big)C^{-1} = Cm_B(C)C^{-1} = 0,$$

y esto implica que $m_A \mid m_B$. Procediendo de manera simétrica a partir del hecho de que $B = C^{-1}AC$, podemos ver que también $m_B \mid m_A$. Como tanto m_A como m_B son polinomios mónicos, esto implica que $m_A = m_B$. □

3. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostrar que el polinomio minimal de A considerada como matrix real coincide con el polinomio minimal de A considerada como matrix compleja.

Solución. Sean $m_A^{\mathbb{R}}$ y $m_A^{\mathbb{C}}$ los polinomios minimales de A en tanto matriz real y matriz compleja, respectivamente. Si notamos $\overline{m}_A^{\mathbb{C}}$ al polinomio que resulta de $m_A^{\mathbb{C}}$ después de conjugar sus coeficientes, $\overline{m}_A^{\mathbb{C}} + m_A^{\mathbb{C}}$ es un polinomio del mismo grado que $m_A^{\mathbb{C}}$ (porque $m_A^{\mathbb{C}}$ es mónico), con coeficientes reales y que se anula en A, así que $m_A^{\mathbb{R}} \mid \overline{m}_A^{\mathbb{C}} + m_A^{\mathbb{C}}$: esto nos dice que

$$\deg m_A^{\mathbb{R}} \leq \deg m_A^{\mathbb{C}}.$$

Por otro lado, como $m_A^{\mathbb{R}} \in \mathbb{C}[X]$ y $m_A^{\mathbb{R}}(A) = 0$, la definición de $m_A^{\mathbb{C}}$ implica que

$$m_A^{\mathbb{C}} \mid m_A^{\mathbb{R}}.$$

Como $m_A^{\mathbb{C}}$ y $m_A^{\mathbb{R}}$ son elementos mónicos de $\mathbb{C}[X]$, estas dos observaciones nos permiten concluir que $m_A^{\mathbb{C}} = m_A^{\mathbb{R}}$. □

4. Determinar los polinomios minimal y característico de las siguientes transformaciones lineales:

(*a*) $f : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ dada por $f(p) = p' + 2p$;

(*b*) $f : M_n(k) \to M_n(k)$ dada por $f(A) = A^t$, cuando $n > 1$ y k tiene característica distinta de 2;

(*c*) $f : M_n(k) \to M_n(k)$ dada por $f(A) = BA$ para una matrix $B \in M_n(k)$ fija.

Solución. (*a*) Notemos que la aplicación $g = f - 2\mathrm{id} : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ es tal que $g(p) = p'$ para todo $p \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$. Como el grado de un elemento de $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ es a lo sumo 3, es claro que $g^4 = 0$. Esto nos dice que f satisface el polinomio $(X-2)^4$ y que el polinomio minimal de f lo divide. Por otro lado, como $(f - 2\mathrm{id})^3(X^3) = 3! \neq 0$, es $(f - 2\mathrm{id})^3 \neq 0$: vemos así que m_f es de hecho *igual* a $(X-2)^4$. Como el grado de m_f coincide con la dimensión de $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$, concluimos además que $\chi_f = m_f$.

(*b*) Sabemos que para toda matriz $A \in M_n(k)$ es $(A^t)^t = A$. Esto nos dice precisamente que $f^2 = \mathrm{id}$, es decir, que f satisface el polinomio $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. Notemos que como la característica de k no es 2, se tiene que $1 \neq -1$. Como $n > 1$, no toda matriz de $M_n(k)$ es simétrica, y entonces $f \neq \mathrm{id}$: esto significa que f no satisface al polinomio $X - 1$; por otro lado, si $U = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, es $f(U) \neq -U$, así que $f \neq -\mathrm{id}$ y f no satisface al polinomio $X + 1$. Debe ser entonces $m_f = (X-1)(X+1)$.

Por otro lado, sabemos que todo factor irreducible de χ_f divide a m_f, y que todos los factores irreducibles de m_f aparecen en χ_f. Esto significa que $\chi_f = (X-1)^a(X+1)^b$ para ciertos a, $b \geq 1$ tales que $a + b = n^2$. El espacio de autovectores de f correspondientes al autovalor 1 es el subespacio de las matrices simétricas de $M_n(k)$, que sabemos tiene dimensión $\binom{n+1}{2}$, mientras que los autovectores de f correspondientes al autovalor -1 es el subespacio de las matrices antisimétricas, que tiene dimensión $\binom{n}{2}$. Esto nos dice que $a \geq \binom{n+1}{2}$ y que $b \geq \binom{n}{2}$. Como $\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = n^2$, vemos que de hecho valen las dos igualdades y que entonces

$$\chi_f(X) = (X+1)^{\binom{n+1}{2}}(X-1)^{\binom{n}{2}}.$$

(*c*) Si $p \in k[X]$, es inmediato verificar que $p(f)(A) = p(B)A$ para toda matriz $A \in M_n(k)$. En particular, $m_B(f)(A) = m_B(B)A = 0$ para toda $A \in M_n(k)$, de manera que $m_B(f) = 0$. Así, $m_f \mid m_B$. Por otro lado, $0 = m_f(f)(Id) = m_f(B)Id = m_f(B)$, así que $m_B \mid m_f$. Como m_B y m_f son polinomios mónicos, esto implica que $m_f = m_B$.

Sea $E_{i,j}$, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, la matriz cuyo único coeficiente no nulo está en la posición (i, j) y vale 1. Entonces

$$\mathscr{B} = \{E_{1,1}, E_{2,1}, \dots, E_{n,1}, E_{1,2}, \dots, \dots, \dots, E_{n,2}, \dots, E_{1,n}, \dots, E_{n,n}\}$$

es una base ordenada de $M_n(k)$ y es fácil ver que

$$[f]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ & & & B \end{pmatrix}.$$

Es inmediato, entonces, que $\chi_f = \chi_f^n$. □

5. Mostrar que si $d : f \in \mathbb{R}[X] \mapsto f' \in \mathbb{R}[X]$ es el endomorfismo de $\mathbb{R}[X]$ dado por la derivación, no existe $p \in \mathbb{R}[X] \setminus 0$ tal que $p(d) = 0$.

Solución. Supongamos que existe $p \in \mathbb{R}[X]$ tal que $p(d) = 0$, que p tiene grado n y que $p = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$ con $\alpha_n \neq 0$. Entonces

$$0 = p(d)(X^n) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_n \tfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}X^i}(X^n) = \alpha_n n!.$$

Esto es absurdo. □

6. (*a*) Calcular A^{1000} si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(*b*) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, determinar A^{-1}, A^3 y A^{-3}.

Solución. (*a*) Como la matriz es triangular superior, vemos inmediatamente que el polinomio característico de A es $\chi_A(X) = X^2(X-1) = X^3 - X^2$. Esto implica que $A^3 = A^2$.

Supongamos inductivamente que $r \geq 0$ y que sabemos que $A^{3+k} = A^2$: entonces

$$A^{3+k+1} = A^{3+k}A = A^2A = A^3 = A^2.$$

Así, vemos que $A^r = A^2$ para todo $r \geq 3$. En particular, $A^{1000} = A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. □

7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Mostrar que $f \in \operatorname{End}(V)$ es un isomorfismo sii $\chi_f(0) \neq 0$. En ese caso, determinar a f^{-1} como polinomio en f.

8. Mostrar que un endomorfismo f de un espacio vectorial complejo V de dimensión finita tal que su único autovalor es 0 es nilpotente. ¿Qué sucede en el caso real?

Solución. La hipótesis nos dice que la única raiz compleja del polinomio característico $\chi_f \in \mathbb{C}[X]$ es 0, esto es, que $\chi_f(X) = X^n$ para $n = \dim V$. El teorema de Cayley-Hamilton, entonces, implica que $0 = \chi_f(f) = f^n$ y vemos que f es nilpotente.

Por otro lado, si el espacio vectorial es *real*, esto no es cierto. Por ejmeplo, sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la única transformación lineal que tiene matriz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Entonces la única raíz real de $\chi_f(X) = X(X^2+1)$ es 0, así que el único autovalor de f es cero. Sin embargo, es fácil ver que f no es nilpotente: en efecto, $f^{4k} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ para todo $k \geq 1$. □

9. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{tr} A = 0$. Mostrar que A es semejante a una matriz B que tiene su diagonal nula.

Solución. Basta mostrar que

> *si V es un espacio vectorial de dimensión n y $f : V \to V$, entonces existe una base $\mathscr{B}$ de V tal que la matriz $[f]_{\mathscr{B}}$ tiene ceros en la diagonal.*

TERMINAR

10. Determinar el polinomio minimal de un proyector $p \in \operatorname{End}(V)$ tal que $\dim \operatorname{im} p = s$.

11. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita.

(a) Si $f \in \operatorname{End}(V)$ es diagonalizable, y $S \subset V$ es un subespacio f-invariante, entonces $f|_S$ es diagonalizable.

(b) Sean $f, g \in \operatorname{End}(V)$ tales que $fg = gf$. Mostrar que si $\lambda \in k$ y $V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$, entonces V_λ es g-invariante.

(c) Sean $f, g \in \mathsf{End}(V)$ dos endomorfismos diagonalizables de V tales que $fg = gf$. Entonces son diagonalizables *simultáneamente*, es decir, existe una base $\mathscr{B}$ de V tal que $[f]_B$ y $[g]_B$ son simultáneamente diagonales.

(d) Sea $f \in \mathsf{End}(V)$ diagonalizable y con exactamente $\dim V$ autovalores distintos. Mostrar que si $g \in \mathsf{End}(V)$ es tal que $fg = gf$, entonces g es diagonalizable. ¿Qué sucede cuando f posee autovalores con multiplicidad más grande que 1?

12. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Determine todos los endomorfismos $f \in \mathsf{End}(V)$ tales que todo subespacio $S \subset V$ es f-invariante.

13. Un endomorfismo $f \in \mathsf{End}(V)$ de un espacio vectorial es *semisimple* si todo subespacio f-invariante $S \subset V$ admite un complemento en V que es f-invariante.

(a) Muestre que un endomorfismo diagonalizable es semisimple.

(b) Muestre que si k es algebraicamente cerrado, todo endomorfismo semisimple es diagonalizable.

(c) Dé un ejemplo de un endomorfismo semisimple no diagonalizable

14. Mostrar que si k es un cuerpo algebraicamente cerrado, V un espacio vectorial de dimensión finita sobre k y $f \in \mathsf{End}(V)$, entonces existe una base $\mathscr{B}$ de V tal que $[f]_{\mathscr{B}}$ es triangular superior.

¿Es necesaria la hipótesis hecha sobre el cuerpo?

15. Determinar *todas* las matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ tales que $A^2 + Id = 0$.

16. Mostrar que $\chi_{A^t} = \chi_A$ y que $m_{A^t} = m_A$ cualquiera sea $A \in M_n(k)$.

17. (a) Dar un ejemplo de un par de matrices A y B tal que $m_{AB} \neq m_{BA}$.

(b) Mostrar que si $f \in k[X]$ y $A, B \in M_n(k)$, entonces $ABf(AB) = Af(BA)B$.

(c) Mostrar que si $A, B \in M_n(k)$, entonces $m_{AB} = m_{BA}$ ó $m_{AB} = Xm_{BA}$ ó $m_{BA} = Xm_{AB}$.

(d) Mostrar que si $A, B \in M_n(k)$, entonces $Id - AB$ es inversible sii $Id - BA$ es inversible.

18. Determine la validez de los siguientes enunciados:

(a) Si A es diagonalizable, A^2 también.

(b) Si A es diagonalizable y $\lambda \in k$, entonces, λA es diagonalizable.

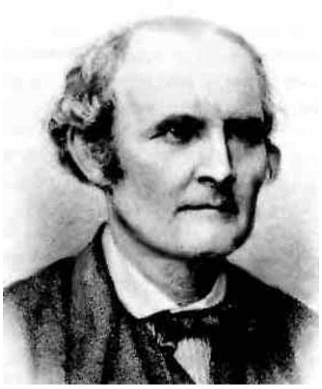
(c) Si A y B son diagonalizables, $A + B$ es diagonalizable.

(d) Si A y B son diagonalizables, AB es diagonalizable.

(e) Si A y B son diagonalizables y $AB = BA$, entonces $A + B$ y AB son diagonalizables.

19. Mostrar que en $M_2(\mathbb{C})$ no hay tres matrices linealmente independientes que conmuten entre sí.

¿Puede determinar el tamaño máximo de un conjunto de matrices linealmente independientes que conmutan entre sí en $M_3(\mathbb{C})$?



Arthur Cayley
1821 - 1895

Lo más importante del trabajo de Cayley es el desarrollo del álgebra de matrices y su trabajo en geometría no euclidea n-dimensional

Sir William Rowan Hamilton
1805 - 1865

En 1843 Hamilton descubrió los cuaterniones, el primer álgebra no conmutativa en ser estudiada. El sintió que esto revolucionaria la física matemática y pasó el resto de su vida trabajando con ellos.