ÁLGEBRA LINEAL
Primer Cuatrimestre — 2011

Práctica 5: Determinantes

1. (a) Pruebe que una permutación π se escribe como producto de transposiciones. Demuestre que la paridad del número de factores empleados depende sólo de π.

(b) Calcule el signo de las siguientes permutaciones: $(2\,3\,1)$, $(2\,3\,4\,1)$, $(5\,3\,8)$ y $(3\,2\,4)(1\,5)$.

(c) Pruebe que

$$\mathsf{sgn}(\pi) = \frac{\prod_{i<j}(x_{\pi(i)} - x_{\pi(j)})}{\prod_{i<j}(x_i - x_j)}$$

(d) Demuestre que toda permutación se puede escribir como un producto de ciclos disjuntos.

2. (a) Sea $A = (a_{ij}) \in M_6(k)$. ¿Con qué signos aparecen los siguientes monomios en el desarrollo de $\det A$?

(i) $a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42} \cdot a_{56} \cdot a_{14} \cdot a_{65}$;

(ii) $a_{32} \cdot a_{43} \cdot a_{14} \cdot a_{51} \cdot a_{66} \cdot a_{25}$.

(b) Sea $A = (a_{ij}) \in M_4(k)$. Escriba todos los términos de $\det A$ que poseen el factor a_{23} y que tienen signo $+$.

(c) Sin calcular el determinante, calcule los coeficientes de X^4 y X^5 en

$$\det\begin{pmatrix} 2X & X & 1 & 2 \\ 1 & X & 1 & -1 \\ 3 & 2 & X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{pmatrix}.$$

(d) Sin calcular el determinante, calcule los coeficientes de a^6 y b^6 en

$$\det\begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b & 1 & a \\ b & a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Calcule los siguientes determinantes:

(a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

4. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ una matriz triangular superior. Muestre que $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

5. (a) Sean $A \in M_n(k)$, $B \in M_m(k)$ y $C \in M_{n,m}(k)$, y sea $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ la matriz de bloques. Muestre que $\det M = \det A \cdot \det B$.

(b) Sea $l \geq 1$, $n_1, \ldots, n_l \geq 1$, y $A_i \in M_{n_i}(k)$ si $1 \leq i \leq l$. Muestre que

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_l \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{l} \det A_i.$$

(c) Si $A, B, C, D \in M_n(k)$ y A es inversible, muestre que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - ACA^{-1}B).$$

6. Calcule los determinantes de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \ldots & x & x \\ 1 & x & 0 & \ldots & x & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x & x & \ldots & x & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x & a & a & \ldots & a \\ a & x & a & \ldots & a \\ a & a & x & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & a & a & \ldots & x \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & 1 & 2 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 & 1 & 2 & 1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

7. Calcule el determinante de la matrix

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & t+a_{n-1} \end{pmatrix}$$

8. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $a_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$ y $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$. Muestre que $\det A > 0$.

9. (a) Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$, y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Muestre que $\det A = \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)$.

(b) Calcule

$$(i) \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{pmatrix} \qquad (ii) \quad \det \begin{pmatrix} 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \\ 1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2 \\ 1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3 \\ 1+a^4 & 1+b^4 & 1+c^4 & 1+d^4 \end{pmatrix}$$

10. Sea $A \in M_n(k)$.

(a) Muestre que $\operatorname{rk} A \geq s$ sii A posee un menor $s \times s$ con determinante no nulo.

(b) Muestre que $\operatorname{rk} A$ es el mayor entero s tal que A posee un menor $s \times s$ con determinante no nulo.

11. Sea $A \in M_n(k)$ inversible. Calcule $\det(\operatorname{adj} A)$.

12. (a) Si $A \in M_n(k)$ es antisimétrica y n es impar, muestre que $\det A = 0$.

(b) Si $A \in M_n(k)$ es ortogonal, es decir, si $A \cdot A^t = Id$, muestre que es $\det A = \pm 1$.

13. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de un espacio de dimensión finita. Si B y B' son bases de V, muestre que $\det(= |f|_B) \det(|f|_{B'})$. Concluya que tiene sentido definir $\det f = \det(|f|_B)$.

14. Considere el problema lineal $Ax = b$ con A inversible. Notemos $A(i)$ a la matriz que resulta de reemplazar la i-ésima de A por el vector b. Demuestre que

$$x_i = \frac{\det A(i)}{\det A}$$

Gabriel Cramer
1704 - 1752

Cramer trabajó en análisis y en determinantes. Es principalmente conocido por su fórmula para resolver sistemas de ecuaciones.