# Álgebra Lineal
## Primer Cuatrimestre — 2011

## Práctica 4: Espacio dual

**1.** Hallar bases de $S^\circ$ en los siguientes casos:

($a$) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle(1,-1,5),(1,5,0)\rangle$;

($b$) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \langle(1,-1,1-,1),(1,2,3,4)\rangle$;

($c$) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, x_1 - 3x_3 = 0\}$;

($d$) $V = \mathbb{R}^5$, $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) : x_1 + 2x_2 = 0, x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$;

($e$) $V = \mathbb{R}[X]_4$, $S = \{1 + X + X^2, 2 + X^3 + 2X^4, X^3\}$.

**2.** Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y sea $W = \{A \in M_2(k) : AB = 0\}$. Determinar $W^\circ$.

**3.** Determinar bases de $(S+T)^\circ$ y de $(S \cap T)^\circ$:

($a$) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \langle(1,-1,2,1),(2,-1,3,1)\rangle$,
$T = \langle(3,-2,5,1),(0,1,1,1)\rangle$;

($b$) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \langle(1,2,1,2),(1,-2,1,-2)\rangle$,
$T = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y - 2z + w = 0, x + y + z = 0\}$.

($c$) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0\}$,
$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0, 2y - 2z = 0\}$.

**4.** Si $V$ es un espacio vectorial, y $S$, $T$ son subespacios de $V$ tales que $V = S \oplus T$. Entonces $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$.

**5.** Sea $k$ un cuerpo finito, y $V$ un espacio vectorial de dimensión $n$ sobre $k$. Sea $0 \leq l \leq n$. Mostrar que $V$ posee tantos subespacios de dimensión $l$ como subespacios de dimensión $n-l$.

**6.** Sean $V$ y $W$ $K$-espacios vectoriales de dimensión finita y sea $f : V \to W$ una transformación lineal.

($a$) En el caso en que $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$ y $f(x_1,x_2) = (2.x_1 - x_2, 3x_1, x_1 - 2.x_2)$, consideremos las bases $B = \{(1,2),(1,3)\}$ y $B_1 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ de $V$ y $W$ respectivamente. Calcular $|f|_{BB_1}$ y $|f^t|_{B_1^*B^*}$.

($b$) Si $B$ y $B_1$ son bases de $V$ y $W$ respectivamente, probar que

$$|f^t|_{B_1^*B^*} = (|f|_{BB_1})^t.$$

**7.** Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de un espacio vectorial $V$ de dimensión finita. Mostrar que $f$ posee núcleo no trivial sii $f^t$ posee nucleo no trivial.

**8.** Dada la base $B$ del $K$-espacio vectorial $V$, hallar su base dual en cada uno de los siguientes casos:

($a$) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,-1),(2,0)\}$

($b$) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1,-1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

($c$) $V = \mathbb{R}_3[X]$, $B = \{-X + 2, X - 1, X^2 - 3.X + 2, X^3 - 3.X^2 + 2.X\}$

**9.** Sean $f_1$, $f_2$ y $f_3 \in (\mathbb{R}_2[X])^*$ las siguientes formas lineales:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx \qquad f_2(p) = \int_0^2 p(x)\,dx \qquad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x)\,dx$$

($a$) Probar que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.
($b$) Hallar una base $B$ de $\mathbb{R}_2[X]$ tal que $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$.

**10.** Sean $B$ y $B_1$ las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas por $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $B_1 = \{(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}$. Si $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ tiene coordenadas $(1,-3,2)$ respecto de $B^*$, calcular sus coordenadas respecto de $B_1^*$.

**11.** Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita, $S \subset V$ un subconjunto. Consideremos el isomorfismo canónico $L : V \to V^{**}$, ¿Qué relación hay entre $L(S)$, $S^{\circ\circ}$ y $S$?

**12.** Sea $X$ un conjunto y $k^X$ el espacio vectorial de las funciones sobre $X$ con valores en $k$. Sea $W \subset k^X$ un subespacio de dimensión $n$. Mostrar que existen puntos $x_1, \ldots, x_n \in X$ y funciones $f_1, \ldots, f_n \in W$ tales que $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

**13.** Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión $n$, y $\phi_1, \ldots, \phi_n \in V^*$. Mostrar que $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ es una base de $V^*$ sii

$$\bigcap_{1\le i\le n} \ker \phi_i = 0.$$

**14.** Sea $V$ un espacio vectorial, y $f, g \in V^*$. Mostrar que si $k = \mathbb{R}$ y $f g \in V^*$, entonces $f = 0$ o $g = 0$. Determinar una condición necesaria y suficiente sobre $k$ para que el resultado anterior sea válido.

# Repaso

**15.** Determine la intersección y la suma de los siguientes pares de subespacios de $V$:

($a$) $V = \mathbb{R}^5$, $S_1 = \{(x_i)_{i=1}^5 \in \mathbb{R}^5 : x_1 + 2x_2 - x_4 = 2x_1 + x_3 + 3x_5 = 0\}$,
$S_2 = \{(x_1)_{i=1}^5 \in \mathbb{R}^5 : x_1 - 3x_5 = -x_1 - 2x_2 + x_4 = x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0\}$.
($b$) $V = \mathbb{R}^4$, $S_1 = \{(x_i)_{i=1}^4 \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0\}$,
$S_2 = \{(x_i)_{i=1}^4 \in \mathbb{R}^4 : 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$.
($c$) $V = \mathbb{R}^4$, $S_1 = \{(x_i)_{i=1}^4 \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 0\}$,
$S_2 = \langle(-10,5,0,1),(1,2,3,4)\rangle$.

**16.** Sea $f : k^5 \to k^4$ la transformación lineal cuya matriz con respecto a las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar el anulador del núcleo de $f$, la imagen de $f^t$, y una transformación lineal $g : k^4 \to k^5$ tal que $f \circ g = Id$.

**17.** (*a*) Sea $V = M_n(k)$ el espacio vectorial de las matrices $n \times n$, y $S \subset V$ el subespacio de las matrices simétricas. Determinar una base para $S^\circ$.

(*b*) Sea $V = M_n(\mathbb{C})$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de las matrices $n \times n$ con coeficientes complejos. Determinar una base para el anulador del subespacio $H \subset M$ de las matrices hermitianas ($A$ es *hermitiana* si $A = \overline{A}^t$).

**18.** Sean $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\mathscr{U} = \{v_1 + v_3, v_1 + 2v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ y $\mathscr{U}' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $k^3$, y $\mathscr{E}$ su base canónica. Sea $f \in \mathsf{End}(k^3)$ la transformación lineal tal que

$$\|f\|_{\mathscr{B}\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \|f\|_{\mathscr{U}\mathscr{U}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinar la base $\mathscr{U}'$.

**19.** Sea $f : k^3 \to k$ tal que $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3$, y $g : k^3 \to k^3$ tal que su matrix con respecto a la base $\{(1, -1, 2), (-3, 5 - 1), (1, 3, -3)\}$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Describa el anulador de $\ker f + \ker g$.

**20.** Sea $V$ un espacio vectorial y $\mathscr{B}$ una base de $V$. Sea $\mathscr{B}^*$ la base dual de $\mathscr{B}$ en $V^*$, y $\mathscr{B}^{**}$ la base dual de $\mathscr{B}^*$ en $V^{**}$. Determine la matrix que representa al isomorfismo canónico $V \to V^{**}$ con respecto a las bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}^{**}$.

Frigyes Riesz
1880 - 1956

Riesz fue el fundador del análisis funcional y su trabajo tiene muchas aplicaciones importantes en física.