ÁLGEBRA LINEAL

Primer Cuatrimestre — 2011

Práctica 3: Transformaciones lineales. Cambios de base. Matrices

Transformaciones lineales

1. (a) Encuentre un ejemplo de un espacio vectorial V y una aplicación $f : V \to V$ tal que sea $f(v+w) = f(v) + f(w)$ para todo par de vectores $v, w \in V$, pero que no sea lineal.

(b) Encuentre un ejemplo de un espacio vectorial V y una aplicación $g : V \to V$ tal que $g(\lambda v) = \lambda g(v)$ para todo $\lambda \in k$, $v \in V$ pero que no sea lineal.

2. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

(a) $\mathrm{tr} : M_n(k) \to k$.

(b) $L_A : B \in M_{n,m}(k) \mapsto AB \in M_{p,m}(k)$, para cada $A \in M_{p,n}(k)$.

(c) $\frac{d}{dx} : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto f' \in C^\infty(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

(d) $\mathrm{ev}_a : p \in k[X] \mapsto p(a) \in k$, con $a \in k$.

(e) $t : z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$.

(f) $\mathfrak{I} : z \in \mathbb{C} \mapsto \mathfrak{I}z \in \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$. Nota: $\mathfrak{I}z$ es la parte imaginaria de z.

(g) $I : f \in C_{\mathbb{R}}([0,1]) \mapsto \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$.

(h) $L : C_{\mathbb{R}}([0,1]) \to C_{\mathbb{R}}([0,1])$ con $Lf(x) = \int_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

3. Sean $f : U \to V$ y $g : V \to W$ transformaciones lineales. Muestre que

(a) $\ker f \subset \ker g \circ f$.

(b) $\ker f = \ker g \circ f$ si $\operatorname{im} f \cap \ker g = 0$.

(c) $\operatorname{im} g \supset \operatorname{im} g \circ f$.

(d) $\operatorname{im} g = \operatorname{im} g \circ f$ si $\operatorname{im} f = V$.

4. Sean $\alpha_i, \beta_i \in k$ para $i = 0, \dots n$. Supongamos que $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$. Muestre que existe exactamente un polinomio $p \in \mathbb{R}[X]$ de grado menor o igual a n tal que $p(\alpha_i) = \beta_i$ si $0 \leq i \leq n$. Para ello considere la aplicación

$$p \in \mathbb{R}[X]_n \mapsto \begin{pmatrix} p(\alpha_0) \\ \vdots \\ p(\alpha_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

5. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de un espacio vectorial V. Muestre que

(a) $\dim \ker f \cap \operatorname{im} f = \dim \operatorname{im} f - \dim \operatorname{im} f^2$.

(b) $\ker f \subset \operatorname{im} f$ sii $\dim \ker f = \dim \operatorname{im} f - \dim \operatorname{im} f^2$.

(c) $\operatorname{im} f \subset \ker f$ sii $f^2 = 0$..

(d) $\operatorname{im} f = \ker f$ sii $f^2 = 0$ y $\dim \operatorname{im} f = \dim \ker f$.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. ¿Qué sucesiones $(d_k)_{k\geq 1}$ se pueden obtener a partir de un endomorfismo $f : V \to V$ poniendo $d_k = \dim\ker f^k$?

7. Si $f, g : V \to V$ son endomorfismos,

$$\dim \operatorname{im} f \circ g \leq \min\{\dim \operatorname{im} f, \dim \operatorname{im} g\}.$$

¿Hay un enunciado similar para las dimensiones de los núcleos?

8. Sean $f : U \to V$ y $g : V \to W$ transformaciones lineales.

(a) Si $g \circ f$ es un monomorfismo, f es un monomorfismo.

(b) Si $g \circ f$ es un epimorfismo, g es un epimorfismo.

Morfismos nilpotentes

9. (a) Un endomorfismo $f : V \to V$ es nilpotente sii $f^n = 0$ con $n = \dim V$.

(b) Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Construya, para cada $1 \leq k < n$, endomorfismos $f_k : V \to V$ de manera que $f^k = 0$ pero $f^{k-1} \neq 0$.

(c) Muestre que si $f, g : V \to V$ son endomorfismos nilpotentes son tales que $f \circ g = g \circ f$, entonces $f + g$ y $f \circ g$ son nilpotentes. ¿Es necesaria la hipótesis?

10. Sea V un espacio vectorial sobre k de dimensión $n \geq 1$, y sea $f : V \to V$ un endomorfismo nilpotente de V de índice de nilpotencia n, de manera que es $f^n = 0$ pero $f^{n-1} \neq 0$. Muestre que existe una base $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que $f(v_i) = v_{i+1}$ si $0 \leq i < n$, y $f(v_n) = 0$.

11. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo nilpotente de un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.

(a) Sea $t \in k$ y $\exp tf : V \to V$ el endomorfismo

$$\exp tf = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k f^k}{k!}.$$

Observe que esta definición tiene sentido porque la suma es finita.

(i) $\exp tf$ es un automofismo de V y $(\exp tf)^{-1} = \exp(-t)f$.

(ii) $\exp(t+s)f = \exp tf \cdot \exp sf$.

(b) Sea $g = \sum_{k\geq 0} f^k$. Muestre que g y $1 - f$ son automorfismos inversos de V.

Cambios de base

12. En cada caso, encontrar las coordenadas de v en términos de la base $\mathscr{B}$ dada para cada uno de los siguientes espacios vectoriales.

(a) $V = k^3$, $v = (1, 2, 3)$, $\mathscr{B} = \{(1, 2, 1), (1, -2, 1), (0, 3, 0)\}$.

(b) $V = k[X]_3$, $v = X^3 - X^2 + 1$, $\mathscr{B} = \{(X-1)^i : i = 0, \dots, 3\}$.

(c) $V = M_4(k)$, $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathscr{B} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\}$.

13. (a) Sean $A, B \in M_n(k)$ tales que $Av = Bv$ cualquiera sea $v \in k^n$. Mostrar que $A = B$.

(b) Sea V un espacio vectorial sobre k de dimensión finita, y sean $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ y $\mathscr{B}''$ tres bases de V. Mostrar que

$$C(\mathscr{B},\mathscr{B}'') = C(\mathscr{B}',\mathscr{B}'')C(\mathscr{B},\mathscr{B}').$$

(c) Deducir del item anterior que $C(\mathscr{B},\mathscr{B}') = C(\mathscr{B}',\mathscr{B})^{-1}$.

14. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de k^3. Encontrar bases $\mathscr{B}'$ y $\mathscr{B}''$ tales que sea $C(\mathscr{B},\mathscr{B}') = C(\mathscr{B}'',\mathscr{B}) = M$.

15. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales $f : V \to W$ y pares de bases $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$ de V y W, respectivamente, determine $[f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

(a) $V = W = k^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_3 + 3x_1, 2x_1 + x_2, x_3 - x_2)$, $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$ la base canónica de k^3.

(b) $V = W = k^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_3 + 3x_1, 2x_1 + x_2, x_3 - x_2)$, $\mathscr{B}$ la base canónica y $\mathscr{B}' = \{(1,2,3),(2,3,4),(3,0,1)\}$. base canónica de k^3.

(c) $V = k[X]_n$, $f(p) = p'$, $\mathscr{B} = \mathscr{B}' = \{x^i : i = 0, \ldots, n\}$.

(d) $V = k[X]_n$, $f(p) = p'$, $\mathscr{B} = \mathscr{B}' = \{(x-\lambda)^i : i = 0, \ldots, n\}$, con $l \in k$.

(e) $V = k[X]_n$, $f(p) = \int_0^X p(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, $\mathscr{B} = \mathscr{B}' = \{x^i : i = 0, \ldots, n\}$.

(f) $V = M_3(k)$, $f(A) = A^t$, $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$ la base canónica de $M_3(k)$.

16. Sea $\mathscr{B} = \{v_i : i = 1, \ldots, 3\}$ una base de k^3, $\mathscr{B}'\{w_i : i = 1, \ldots, 4\}$ una base de k^4, y sea $f : k^3 \to k^4$ la transformación lineal tal que

$$[f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine $f(v_1 + 2v_2 + 3v_3)$ en término de sus coordenadas en la base $\mathscr{B}'$.

(b) Describa $\ker f$ y $\operatorname{im} f$.

(c) Describa $f^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$.

17. Recordemos que si $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$, la traza de A es $\operatorname{tr} A = \sum_{1 \le i \le n} a_{ii}$. Sea V un espacio vectorial sobre k y $f \in \operatorname{End}(V)$, y sean $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$ bases de V. Mostrar que

$$\operatorname{tr}[f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = \operatorname{tr}[f]_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}$$

de manera que tiene sentido definir la traza de f como

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr}[f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}},$$

ya que esta definición no depende de $\mathscr{B}$.

18. Bases adaptadas

(a) Sea V un espacio vectorial sobre k de dimensión n finita, y sea $f \in \operatorname{End}(V)$ un endomorfismo de V tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Muestre que existe una base $\mathscr{B}$ de V tal que

$$([f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(b) Sea V un espacio vectorial sobre k de dimensión n finita, y sea $p \in \mathsf{End}(V)$ un proyector. Muestre que existe una base $\mathscr{B}$ de V y un entero d con $0 \le d \le n$ tal que

$$([p]_{\mathscr{B},\mathscr{B}})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \le d \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

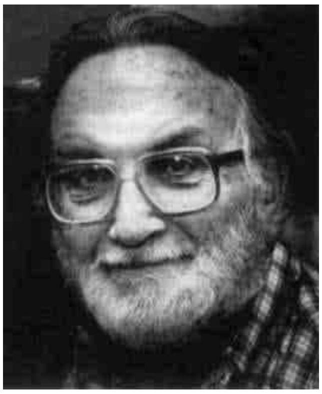
(c) Sean V y W espacio vectorial sobre k de dimensiones n y m finitas respectivamente, y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Muestre que existe una base $\mathscr{B}$ de V, una base $\mathscr{B}'$ de W, y un entero no negativo s tal que

$$([f]_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \le s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

19. Sean $A, B \in M_n(k)$. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Existe $C \in GL_n(k)$ tal que $A = CBC^{-1}$.

(b) Data una base $\mathscr{B}$ de k^n, existe una transformación lineal $f : k^n \to k^n$ y una base $\mathscr{B}'$ tales que $[f]_{\mathscr{B}} = A$ y $[f]_{\mathscr{B}'} = B$.



Max August Zorn
1906 - 1993

Zorn es conocido por el "lema de Zorn" un enunciado equivalente al axioma de elección.