Álgebra Lineal
Primer Cuatrimestre — 2011

Práctica 2: Dependencia lineal y bases

1. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes o no. En caso no serlo, determine que elementos pueden eliminarse de manera que el conjunto residual sea linealmente independiente y genere el mismo subespacio que el conjunto original. Finalmente, complete cada conjunto a una base del espacio ambiente.

(a) $\{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5)\}$ en $\mathbb{R}^3$.
(b) $\{(1,0,-1),(1,1,2),(0,1,1)\}$ en $\mathbb{C}^3$.
(c) $\{(1,1,2),(1,4,3),(3,3,3),(e,\pi,\sqrt{2})\}$ en $\mathbb{R}^3$.
(d) $\{(1,1,1),(1,\alpha,\alpha^2),(1,\beta,\beta^2)\}$ en $\mathbb{R}^3$ con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
(e) $\{(1,1,1,1),(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3),(1,\beta,\beta^2,\beta^3)\}$ en $\mathbb{R}^4$ con $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.
(f) $\{(\frac{1}{2}(X-1)(X-2),(X-1)(X-3),(X-2)(X-3)\}$ en $\mathbb{R}[X]_2$.
(g) $\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\1&i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\}$ en $M_4(\mathbb{C})$.

2. Determinar todos los $\lambda\in k$ de manera que los siguientes conjuntos resulten linealmente independientes:

(a) $\{(1,2,k),(1,1,1),(0,1,1-k)\}$ en $\mathbb{R}^3$.
(b) $\{kX^2+X,-X^2+k,k^2X\}$ en $\mathbb{R}[X]_4$.
(c) $\{\begin{pmatrix}1&k\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}k&1\\0&2k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\}$ en $M_4(\mathbb{C})$.

3. Encuentre bases para los siguientes espacios vectoriales

(a) $V=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}):A=A^t\}$ sobre $\mathbb{R}$.
(b) $V=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{C}):A=\bar{A}^t\}$ sobre $\mathbb{R}$.
(c) $V=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{C}):\operatorname{tr}A=0\}$ sobre $\mathbb{R}$.
(d) $V=\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}:\forall n\in\mathbb{N}_0, a_{n+1}=2a_n\}$ sobre $\mathbb{R}$.
(e) $V=\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}:\forall n\in\mathbb{N}_0, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\}$ sobre $\mathbb{R}$.
(f) $V=\{p\in\mathbb{R}[X]_n:p(0)=p(1)=0\}$ sobre $\mathbb{R}$.
(g) $V=\{p\in\mathbb{R}[X]_n:p(0)=p'(1)=0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

4. Sea $v_i=(a_{i1},\dots,a_{in})\in\mathbb{R}^n$ si $1\le i\le n$, y supongamos que $a_{ij}\le 0$ si $i\neq j$, y que $\sum_{j=1}^n a_{ij}>0$. Mostrar que $\{v_i\}_{1\le i\le n}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

5. Sea $F=\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}\subset\mathbb{R}[X]$ tal que $\deg f_i=i$ si $i\in\mathbb{N}_0$. Mostrar que F es una base de $\mathbb{R}[X]$.

6. Sea $\alpha_i\in k$ para $1\le i\le n$, y sea

$$v_i=(1,\alpha_i,\alpha_i^2,\dots,\alpha_i^{n-1})\in k^n.$$

Determinar cuando $\{v_1,\dots,v_n\}$ es linealmente independiente en k^n.

7. Sea V un espacio vectorial sobre k.

(a) $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subset V$ es linealmente independiente sii el conjunto $\{v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

(b) Si $\lambda \in k \setminus \{0\}$, $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\} \subset V$ es linealmente sii $\{v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

(c) Si $\lambda \in k$, $\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n\} \subset V$ es linealmente independiente sii el conjunto $\{v_1, \dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots, v_n\}$ lo es.

8. Determinar si las siguiente afirmaciones son válidas:

(a) $\langle u, v\rangle = \langle u, v'\rangle \Rightarrow v = v'$, con $u, v, v' \in V$

(b) $S + T = S + T' \Rightarrow T = T'$, con $S, T, T' \subset V$ subespacios.

(c) $S + T = S + T' \Rightarrow \dim T = \dim T'$, con $S, T, T' \subset V$ subespacios.

9. Sea $V \subset \mathbb{R}$ el $\mathbb{Q}$-subespacio vectorial generado por $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$.

(a) Mostrar que existe $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$ y $\deg f \leq 4$. Determinar un tal f explícitamente.

(b) Determinar $\dim V$.

(c) Determine el menor grado de un polinomio no nulo con coeficientes racionales que se anula en $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

10. Sea $A \in M_n(k)$ una matriz. Muestre que $\{I, A, A^2, \dots, A^{n^2-1}\}$ no es un subconjunto linealmente independiente de $M_n(k)$.

11. Sea $V = \{(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} : \forall n \geq 0,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$.

(a) Determine una base de V formada por sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$ de la forma $a_n = \alpha^n$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Encuentre una fórmula cerrada para la sucesión $(F_n)_{n\geq 0} \in V$ de Fibonacci, caracteriza por $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$.

12. Sea V un espacio vectorial, $S, T, U \subset V$ subespacios, y supongamos que

$$S \cap T = S \cap U, \qquad S + T = S + U, \quad \text{y} \quad T \subset U.$$

Muestre que $T = U$. ¿La conclusión puede alcanzarse si se elimina alguna de las tres hipótesis?

13. Sean S, T, U subespacios de un espacio vectorial V.

(a) Muestre que

$$S \cap T + S \cap U \subset S \cap (T + U).$$

(b) De un ejemplo que muestre que en general no vale la igualdad.

Cuerpos finitos

Sea k un cuerpo finito de q elementos.

14. Determine el número de bases que posee k^n.

15. Determine el número $(n)_q!$ de automorfismos que posee k^n.

16. Determine el número $\binom{n}{l}_q$ de subespacios que posee k^n de dimensión l para cada $0 \leq l \leq n$.

17. (*a*) Muestre que

$$\binom{n}{l-1}_q + q^l \binom{n}{l}_q = \binom{n+1}{l}_q.$$

(*b*) Muestre que

$$\binom{n}{l}_q = \frac{(n)_q!}{(l)_q!(n-l)_q!}.$$

18. Determine el número de morfismos $k^n \to k^m$. ¿Cuántos de éstos son monomorfismos? ¿Cuántos epimorfismos?

David Hilbert
1862 - 1943

El trabajo de Hilbert en geometría tuvo la mayor influencia en ese área después de Euclides. Un estudio sistemático de los axiomas de la geometría euclidea llevó a Hilbert a proponer una lista de 21 axiomas y a analizar su importancia. Hizo contribuciones en varias áreas de la física y la matemática.