Álgebra Lineal
Primer Cuatrimestre — 2011

Práctica 1: Generalidades

1. Sea V un espacio vectorial sobre k. Mostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $0v = 0$, $\forall v \in V$;

(b) $\lambda 0 = 0$, $\forall \lambda \in k$;

(c) $(-1)v = -v$, $\forall v \in V$;

(d) $-(-v) = v$, $\forall v \in V$;

(e) $\lambda v = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee v = 0$;

(f) $-0 = 0$.

2. (a) Sea X un conjunto no vacío. Sea $k^X = \{f : X \to k\}$ el conjunto de todas las funciones de X a k. Mostrar que las operaciones

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

hacen de k^X un espacio vectorial sobre k.

Decimos que estas operaciones están definidas *punto a punto*.

(b) ¿Bajo que condiciones es k^X de dimensión finita? Cuando se cumplen, encuentre una base.

3. Sea $X \subset \mathbb{R}$ un abierto no vacío. Muestre que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

(a) $C^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f$ es infinitamente diferenciable$\}$;

(b) $\mathbb{R}^X$;

(c) $C^0(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f$ es continua$\}$;

(d) $L = \{f \in C^1(X) : \forall x \in X, f'(x) = f(x)\}$;

(e) $D(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f$ es derivable$\}$;

(f) $V(x_0) = \{f \in C^1(X) : \forall x \in X, f(x_0) + 3f'(x_0) = 0\}$ para $x_0 \in X$.

Determine todas las inclusiones entre estos espacios.

4. Sea X un conjunto no vacío, V un k-espacio vectorial y sea $V^X = \{f : X \to V\}$, el conjunto de todas las funciones de X en V.

(a) Mostrar que es posible definir sobre V^X operaciones de suma y de producto por elementos de k de forma natural, de manera de que V^X resulte, con respecto a esas operaciones, un espacio vectorial sobre k.

(b) Si $Y \subset X$ es un subconjunto no vacío, ¿puede verse a V^Y como supespacio de V^X?

(c) Si $W \subset V$ es un subespacio vectorial, ¿puede verse a W^X como subespacio de V^X?

5. Sea $A \in M_{n,m}(k)$ una matrix $n \times m$ con coeficientes en k, y consideremos el conjunto $S = \{x \in k^m : Ax = 0\}$ de soluciones del sistema lineal homogéneo asociado a A.

Muestre que S es un subespacio vectorial de k^m.

6. Sean S y T subespacios de un k-espacio vectorial V. Muestre que

(a) $S \cap T$ es un subespacio de V.
(b) Si $S \cup T$ es un subespacio de V entonces $S \subset T$ ó $T \subset S$.

7. Decidir cuales de los siguientes subconjuntos S son sub-k-espacios de V

(a) $S = \{v \in \mathbb{R}^3 : v = a \cdot (1,0,0) + b \cdot (1,1,1),\ \text{con } a,\ b \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$, $k = \mathbb{R}$;
(b) $S = \{ai : a \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{C}$, $k = \mathbb{R}$;
(c) $S = \{ai : a \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{C}$, $k = \mathbb{C}$;
(d) $S = \{f \in k[X] : f = 0 \vee \deg f \geq 2\}$, $V = k[X]$;
(e) $S = \{f \in k[X] : f = 0 \vee \deg f \leq 5\}$, $V = k[X]$;
(f) $S = \{M \in M_{4,4}(k) : M^t = M\}$, $V = M_{4,4}(k)$;
(g) $S = \{M \in M_{4,4}(k) : \operatorname{tr} M = 0\}$, $V = M_{4,4}(k)$;
(h) $S = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f''(1) = f(2)\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $k = \mathbb{R}$.

8. Mostrar que los siguientes conjuntos no son sub-$\mathbb{R}$-espacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$.
(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
(c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$.

9. Sea $V = \mathbb{R}^+$, y consideremos la operación $+$ definida sobre V por

$$+ : (u,v) \in V \times V \mapsto uv \in V,$$

donde uv es el *producto* usual calculado en $\mathbb{R}^+$, y la acción de $\mathbb{R}$ sobre V dada por

$$\cdot : (\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V \mapsto v^\lambda \in V.$$

Muestre que $(V, +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Generadores

10. (a) Encontrar un sistema de generadores de

$$S = \langle (1,-1,2,1), (3,1,0,-1), (1,1,-1,-1) \rangle \subset \mathbb{R}^4.$$

(b) ¿$(2,1,3,5)$ está en S?
(c) ¿Es $S \subset \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$?
(d) ¿Es $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subset S$?

11. Determine dos sistemas de generadores para cada uno de los siquientes espacios vectoriales:

(a) k^n sobre k;
(b) $k[X]_n = \{f \in k[X] : f = 0 \vee \deg f \leq n\}$ sobre k;
(c) $k[X]$ sobre k;
(d) $\mathbb{C}^n$, con $k = \mathbb{R}$;

(e) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=0, x-y=0\}$, con $k=\mathbb{R}$;
(f) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=0, x-y=0\}$, con k arbitrario;
(g) $\{f\in k[X]_4 : f(1)=0, f(2)=f(3)\}$, con $k=\mathbb{Q}$;
(h) $\{f\in C^\infty(\mathbb{R}) : f'''=0\}$, con $k=\mathbb{R}$.

12. Sea X un conjunto no vacío.

(a) Si X es finito, determine un sistema de generadores para k^X.

(b) Sea

$$k_0^X = \{f\in k^X : \text{existe } Y\subset X \text{ finito tal que } f|_{X\setminus Y} \text{ es constante}\},$$

el conjunto de las funciones sobre X que son constantes fuera de un conjunto finito.

Encuentre un sistema de generadores para k_0^X.

(c) ¿Puede encontrar un sistema de generadores para $k^{\mathbb{N}}$?

(d) Si X es finito, y V es un k-espacio vectorial, determine un sistema de generadores para V^X.

Algunos ejemplos que involucran otros cuerpos

13. Suponga que k es un cuerpo y que $l\subset k$ es un subcuerpo de k. Muestre que k es, de manera natural, un l-espacio vectorial.

14. (a) Sea k un cuerpo, y sea $k(X)$ el conjunto de todas las funciones racionales en la variable X, es decir, de todas las expresiones de la forma p/q con p, $q\in k[X]$ dos polinomios, y $q\neq 0$. Muestre que $k(X)$ es resulta ser un cuerpo con respecto a las operaciones 'apropiadas'.

(b) Sea $L\subset k(X)$ el subconjunto de las funciones racionales en X que son pares, es decir, de los cocientes p/q con p, $q\in k[X]$ con $q\neq 0$ y

$$\frac{p(-X)}{q(-X)} = \frac{p(X)}{q(X)}.$$

Muestre que L es un subcuerpo de $k(X)$.

(c) Encuentre generadores para $k(X)$ considerado como espacio vectorial sobre L.

15. Sea $d\in\mathbb{Z}$, y sea $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a+b\sqrt{d} : a, b\in\mathbb{Q}\}$. Observe que este conjunto no depende de cuál de las dos raices de d es utilizada a la derecha. Muestre que $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$.

16. Sea $n\in\mathbb{N}$. Definimos una relación entre elementos de $\mathbb{Z}$ poniendo

$$a\equiv b \quad \text{sii} \quad n|b-a.$$

(a) Verifique que se trata de una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

(b) Escribamos $\mathbb{Z}_n$ al conjunto de clases de equivalencia de $\equiv$ en $\mathbb{Z}$. Si $a\in\mathbb{Z}$, escribimos $[a]$ a la clase de equivalencia de a. Consideremos la operación

$$+ : ([a],[b])\in\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n \mapsto [a]+[b] := [a+b]\in\mathbb{Z}_n.$$

Muestre que está bien definida y que $(\mathbb{Z}_n,+)$ es un grupo abeliano.

(*c*) Definamos ahora un producto en $\mathbb{Z}_n$ poniendo

$$\cdot : ([a],[b]) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \mapsto [a]\cdot[b] := [ab] \in \mathbb{Z}_n.$$

Muestre que está bien definido y que $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ es un anillo.

(*d*) Muestre que si n es un número primo, $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ es un *cuerpo*.

(*e*) Determine todos los valores de n para los cuales $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ es un cuerpo.

17. Determine *todos* los cuerpos con 2, 3, 4 y 5 elementos. ¿Hay algún cuerpo con 6 elementos?

18. Encuentre todos los subespacios vectoriales de los $\mathbb{Z}_p$-espacios vectoriales $\mathbb{Z}_p^2$ y $\mathbb{Z}_p^3$ para $p \in \{2,3\}$.

Giuseppe Peano
1858 - 1932

Peano fue el fundador de la lógica simbólica y sus intereses se centraron en los fundamentos de la matemática y en el desarrollo de un lenguaje lógico formal.