Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre — 2011

Segundo parcial

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Hojas: ....

---

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo k, sea $f : V \to V$ un endomorfismo y $p \in k[X]$. Entonces

$$p(f) \text{ es un isomorfismo} \iff p \text{ y el polinomio minimal } m_f \text{ son coprimos.}$$

2. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique su respuesta.

(i) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & e^2 & 2 & 1/7 \\ -2 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5/9 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $\det A^t A \neq 0$.

(ii) Si $\det A \neq 0$, entonces existe un polinomio $h \in k[X]$ tal que $\operatorname{adj}(A) = h(A)$.

(iii) Si $A \in M_7(\mathbb{C})$ es una matriz con coeficientes *enteros* y $\det A = 2$, entonces A^{-1} es una matriz con coeficientes enteros.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y sea $B \in M_4(\mathbb{C})$ una matriz, y supongamos que

- $(B-2I)^2(B-3I)^2 = 0$,
- $B \neq 2I$,
- el rango de $B - 3I$ es 4,
- B y A no son semejantes.

Determine las formas de Jordan J_A y J_B de A y de B, respectivamente, y encuentre una matriz inversible C tal que $J_A = CAC^{-1}$.

4. Consideremos al espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ dotado de su producto interno usual. Sea $S = \langle (1,2,0,1) \rangle \subset \mathbb{R}^4$, sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal cuyo rango es 1 y tal que $(0,1,1,1) \in \operatorname{im} f$ y sea $T = \ker f^*$. Encuentre una base ortonormal para el subespacio $W = S^\perp \cap T$ y el proyector ortogonal $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuya imagen es W.

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$. ¿Existe un producto interno en $\mathbb{C}^4$ con respecto al cual A es autoadjunta? ¿Y normal?