Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre — 2011

Segundo parcial

APELLIDO Y NOMBRE: ....

L.U.: .... HOJAS: ....

---

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo k, sea $f : V \to V$ un endomorfismo y $p \in k[X]$. Entonces

$$p(f) \text{ es un isomorfismo } \iff p \text{ y el polinomio minimal } m_f \text{ son coprimos.}$$

Solución. Sea $p \in k[X]$ un polinomio tal que p y m_f son coprimos. Existen $s, t \in k[X]$ tales que $1 = sp + tm_f$ y, evaluando esta igualdad en f, vemos que

$$\mathrm{id} = s(f)p(f) + t(f)m_f(f) = s(f)p(f).$$

Esto nos dice que $p(f)$ es un isomorfismo con inversa $s(f)$.

Para probar la reciproca supongamos que p no es coprimo con m_f, de manera que existen $r, s, q \in k[x]$ tales que $p = rq$, $m_f = qs$ y q no es constante. Para ver que $p(f)$ no es un isomorfismo, basta mostrar que $q(f)$ no lo es. Si lo fuese, tendríamos que $0 = q(f)^{-1}m_f(f) = s(f)$: esto es absurdo porque $\deg s < \deg m_f$. □

2. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique su respuesta.

(i) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & e^2 & 2 & 1/7 \\ -2 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5/9 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $\det A^t A \neq 0$.

(ii) Si $\det A \neq 0$, entonces existe un polinomio $h \in k[X]$ tal que $\mathrm{adj}(A) = h(A)$.

(iii) Si $A \in M_7(\mathbb{C})$ es una matriz con coeficientes *enteros* y $\det A = 2$, entonces A^{-1} es una matriz con coeficientes enteros.

Solución. (a) FALSO. La matriz $A^t A \in M_5(\mathbb{R})$, tiene rango $\mathrm{rg} A^t A \leq \mathrm{rg} A \leq 4 < 5$

(b) VERDADERO. Sabemos que $\chi_A(0) = \det A \neq 0$. Como $\chi_A(X) - \chi_A(0)$ se anula en 0, existe un polinomio $g \in k[X]$ tal que $\chi_A(X) = X g(X) + \det(A)$. Evaluando esta igualdad en A vemos que $0 = \chi_A(A) = Ag(A) + \det(A)I$, así que $-Ag(A) = \det(A)I = A\,\mathrm{adj}(A)$. Multiplicando esto a izquierda por A^{-1} vemos que $-g(A) = \mathrm{adj}(A)$.

(c) FALSO. Si $\det A = 2$ entonces $\det A^{-1} = \frac{1}{2}$. Es imposible, entonces, que A^{-1} tenga coeficientes enteros. □

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y sea $B \in M_4(\mathbb{C})$ una matriz, y supongamos que

- $(B-2I)^2(B-3I)^2 = 0$,
- el rango de $B-3I$ es 4,
- $B \neq 2I$,
- B y A no son semejantes.

Determine las formas de Jordan J_A y J_B de A y de B, respectivamente, y encuentre una matriz inversible C tal que $J_A = CAC^{-1}$.

Solución. Como A es triangular superior, sus autovalores aparecen en su diagonal: así, 2 es el único autovalor de A. Es $\operatorname{im}(A-2I) = \langle e_1 \rangle$ y $\ker(A-2I) = \langle e_1, e_2 - e_3, e_3 - e_4 \rangle$ tiene dimensión 3. Como $\operatorname{im}(A-2I) \subseteq \ker(A-2I)$, $(A-2I)^2 = 0$; como además $A-2I \neq 0$, esto nos dice que el bloque de Jordan más grande en J_A tiene tamaño 2. Como hay $\dim\ker(A-2I) = 3$ bloques en total, concluimos que

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $(A-2I)e_2 = e_1$, la base $\{e_2, e_1, e_2 - e_3, e_3 - e_4\}$ realiza la forma de Jordan de A. En otras palabras, si

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y $C = D^{-1}$, entonces $J_A = CAC^{-1}$.

Por otro lado, como el rango de $B-3I$ es 4, se trata de un isomorfismo, así que también lo es $(B-3I)^2$ y $(B-2I)^2 = (B-2I)^2(B-3I)^2(B-3I)^{-2} = 0$. Luego el polinomio minimal m_B divide a $(X-2)^2$. Como $B \neq 2I$, esto nos dice que m_B es, de hecho, igual a $(X-2)^2$. Así, 2 es el único autovalor de B y en la forma de Jordan de B hay un bloque 2×2. Pero entonces o bien los tamaños de los bloques en J_B son 2 y 2 o bien son 2, 1 y 1. En el segundo caso, B y A serían semejates —porque tendrían la misma forma de Jordan— así que necesariamente

$$J_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

4. Consideremos al espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ dotado de su producto interno usual. Sea $S = \langle (1,2,0,1) \rangle \subset \mathbb{R}^4$, sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal cuyo rango es 1 y tal que $(0,1,1,1) \in \operatorname{im} f$ y sea $T = \ker f^*$. Encuentre una base ortonormal para el subespacio $W = S^\perp \cap T$ y el proyector ortogonal $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuya imagen es W.

Solución. Es

$$W = S^\perp \cap \ker f^* = S^\perp \cap (\operatorname{im} f)^\perp = (S + \operatorname{im} f)^\perp = \langle (1,2,0,1),(0,1,1,1)\rangle^\perp,$$

así que $W = \langle (2,-1,1,0),(1,-1,0,1)\rangle$. Realizando el procedimiento de Gram-Schmidt para esta base de W, vemos que

$$\tfrac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1,0), \quad \tfrac{1}{2}(0,-1,-1,2)$$

es una base ortonormal de W. El proyector ortogonal $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ con imagen W, entonces, está dado por

$$p(x,y,z,w) = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(2x - y + z) + \tfrac{1}{2}(-y - z + 2w)$$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$. ¿Existe un producto interno en $\mathbb{C}^4$ con respecto al cual A es autoadjunta? ¿Y normal?

Solución. El polinomio característico es

$$\chi_A(x) = 2 - 3x + 3x^2 - 3x^3 + x^4 = (x-2)(x-1)(x-i)(x+i).$$

Como tiene cuatro raíces simples, vemos que A es diagonalizable. Como tiene autovalores que no son reales, no es autoadjunta para ningún producto interno. Si $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de $\mathbb{C}^4$ de autovectores de A, sabemos que existe un único producto interno en $\mathbb{C}^4$ para el que $\mathscr{B}$ es una base ortonormal. Con respecto a ese producto interno, A se diagonaliza en una base ortonormal, así que A es normal. □