# ÁLGEBRA LINEAL
## Primer Cuatrimestre — 2011
## Segundo parcial

---

APELLIDO Y NOMBRE: ..........................................................

L.U.: ................................ HOJAS: ................................

---

**1.** Sea $n \geq 1$ y para cada matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ denotemos $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}$ al conjunto de los autovalores de $A$.

Pruebe que si $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $p \in \mathbb{C}[X]$ es un polinomio arbitrario, entonces

$$p\big(\sigma(A)\big) = \sigma\big(p(A)\big).$$

**2.** Si $f : V \to V$ es un endomorfismo de un espacio vectorial $V$ de dimensión finita y positiva sobre un cuerpo $k$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

($a$) Los únicos subespacios $f$-invariantes de $V$ son 0 y $V$.

($b$) Todo vector $v \in V$ no nulo es cíclico.

($c$) El polinomio característico $\chi_f$ es irreducible.

**3.** Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique su respuesta.

($i$) Si $A \in M_6(k)$ es una matriz tal que $A^3 = 0$, entonces todo menor de $4 \times 4$ tiene determinante nulo.

($ii$) Existe una matriz $B \in M_3(\mathbb{C})$ tal que $\mathrm{adj}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

**4.** Sea $f : \mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^8$ una transformación lineal cuyo polinomio característico es $\chi_f(X) = X^8 - 2X^7 + 2X^5 - X^4$ y tal que

$$\dim \ker f^3 = \dim \ker(f - \mathrm{id}).$$

Encuentre todas las posibles formas de Jordan de $f$.

**5.** Mostrar que existe un producto interno en $\mathbb{R}^3$ para el cual

$$(1,1,0) \perp (0,1,1),$$
$$\langle (1,0,-1),(1,3,2)\rangle^{\perp} = \langle (1,2,3)\rangle,$$
$$\|(1,0,-1)\|^2 = 5 \text{ y } \|(1,2,3)\|^2 = 1.$$

Determinar $\|(3,4,5)\|$.