Álgebra Lineal
Primer Cuatrimestre — 2011
Segundo parcial

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Hojas: ....

---

1. Sea $n \geq 1$ y para cada matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ denotemos $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}$ al conjunto de los autovalores de A.

Pruebe que si $A \in M_n(\mathbb{C})$ y $p \in \mathbb{C}[X]$ es un polinomio arbitrario, entonces

$$p\big(\sigma(A)\big) = \sigma\big(p(A)\big).$$

Solución. Sea $p = \sum_{i=0}^{d} p_i X^i \in \mathbb{C}[X]$.

Sabemos que existe una matriz inversible $C \in \mathsf{GL}(n)$ tal que $B = CAC^{-1}$ es triangular superior. Como $\sigma(A) = \sigma(B)$ y $\sigma(p(A)) = \sigma(p(B))$ porque $p(B) = Cp(A)C^{-1}$, basta mostrar que $p(\sigma(B)) = \sigma(p(B))$. En otras palabras, podemos suponer que A es triangular superior.

En ese caso, existen entonces una matriz diagonal D y una matriz estrictamente triangular superior tales que $A = D + U$. Es claro que

$$\sigma(A) = \{d_{i,i} : 1 \leq i \leq \dim V\}. \tag{1}$$

Afirmo que

$$\textit{si } i \geq 0\textit{, hay una matriz estrictamente triangular superior } U_i \textit{ tal que } A^i = D^i + U_i. \tag{2}$$

Para $i = 0$, esto es inmediato. Si suponemos inductivamente que vale para $i \geq 0$, entonces

$$A^{i+1} = A^i A = (D^i + U_i)(D + U) = D^{i+1} + (D^i U + U_i D + U_i U).$$

Como la matriz $U_{i+1} = D^i U + U_i D + U_i U$ es estrictamente triangular superior, esto prueba (2) por inducción. Podemos ahora calcular que

$$p(A) = \sum_{i=0}^{d} p_i A^i = \sum_{i=0}^{d} p_i (D^i + U_i) = \sum_{i=0}^{d} p_i D^i + \sum_{i=0}^{d} p_i U_i,$$

y si llamamos $U' = +\sum_{i=0}^{d} p_i U_i$, que es una matriz estrictamente triangular superior, tenemos que

$$p(A) = p(D) + U'.$$

Esto implica inmediatamente que el conjunto de autovalores de $p(A)$ es

$$\sigma(p(A)) = \{p(d_{i,i}) : 1 \leq i \leq \dim V\},$$

que, de acuerdo a (1), es precisamente $p(\sigma(A))$. $\square$

Otra solución. Supongamos que $p(X) = \sum_{i=0}^{d} p_i X^i \in \mathbb{C}[X]$. Basta suponer que $d > 0$, porque sino la igualdad del enunciado es inmediata.

Sea $\lambda \in \sigma(A)$, de manera que existe $v \in \mathbb{C}^n \setminus 0$ tal que $Av = \lambda v$. Entonces

$$p(A)v = \sum_{i=0}^{d} p_i A^i v = \sum_{i=0}^{d} p_i \lambda^i v = p(\lambda)v,$$

y vemos que $p(\lambda)$ es un autovalor de $p(A)$, ya que admite a v como autovector. En otras palabras, es $p(\lambda) \in \sigma(p(A))$. Esto muestra que $p(\sigma(A)) \subseteq \sigma(p(A))$.

Por otro lado, sea $\mu \in \sigma(p(A))$, de manera que existe un vector $v \in \mathbb{C}^n$ no nulo tal que $p(A)v = \mu v$. Entonces $(p(A)-\mu)v = 0$ y esto nos dice que si $m_{A,v}(X)$ es el polinomio minimal de A con respecto a v, entonces a $m_{A,v}(X) \mid p(X) - \mu$. Como $m_{A,v}$ tiene grado positivo, existe una raíz $\lambda \in \mathbb{C}$ de $m_{A,v}$, y entonces $p(\lambda) = \mu$. Por otro lado, como $m_{A,v}$ divide al polinomio minimal m_A de A y este a su vez divide al polinomio característico χ_A, el escalar λ es una raíz de χ_A, esto es, que $\lambda \in \sigma(A)$. Pero entonces $\mu = p(\lambda) \in p(\sigma(A))$. Esto prueba que $\sigma(p(A)) \subseteq p(\sigma(A))$. □

Otra solución. Sean m_A y $m_{p(A)}$ los polinomios minimales de A y de $p(A)$, respectivamente.

Como $m_{p(A)}(p(A)) = 0$, la minimalidad de m_A implica que $m_A(X) \mid m_{p(A)}(p(X))$. Vemos que si λ es una raíz de m_A, entonces λ también es raíz de $m_{p(A)}(p(X))$, esto es, $p(\lambda)$ es raíz de $m_{p(A)}$. En otras palabras, vemos que $p(\sigma(A)) \subseteq \sigma(p(A))$.

Por otro lado, sea $\lambda \in \sigma(p(A))$. Si los polinomios m_A y $p - \lambda$ son coprimos, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[X]$ tales que $\alpha m_A + \beta(p-\lambda) = 1$ y, evaluando en A, tenemos que $\beta(A)(p(A)-\lambda I) = I$, de manera que $p(A)-\lambda I$ es inversible: esto es absurdo ya λ es un autovalor de $p(A)$. Concluimos entonces que m_A y p_λ no son coprimos y, en consecuencia, que poseen una raíz común $\mu \in \mathbb{C}$. Pero entonces $m_A(\mu) = 0$, así que $\mu \in \sigma(A)$ y, por otro lado, $p(\mu) - \lambda = 0$, con lo que $\lambda = p(\mu) \in p(\sigma(A))$. Esto prueba que $\sigma(p(A)) \subseteq p(\sigma(A))$. □

Otra solución. Sea $\lambda \in \sigma(A)$, de manera que existe $v \in \mathbb{C}^n \setminus 0$ tal que $Av = \lambda v$. Entonces $p(A)v = p(\lambda)v$, y vemos que $p(\lambda)$ es un autovalor de $p(A)$, ya que admite a v como autovector. En otras palabras, es $p(\lambda) \in \sigma(p(A))$. Esto muestra que $p(\sigma(A)) \subseteq \sigma(p(A))$.

Sea ahora $\lambda \in \sigma(p(A))$ y supongamos que tenemos una factorización del polinomio $p(X) - \lambda$ de la forma

$$p(X) - \lambda = \alpha(X - \mu_1) \cdots (X - \mu_r), \tag{3}$$

con $\alpha, \mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{C}$. Como λ es un autovalor de $p(A)$, la matriz $p(A) - \lambda I$ no es inversible, y como $p(A) - \lambda I = (A - \mu_1 I) \cdots (A - \mu_r I)$, no puede ser que todos los factores que aparecen a la derecha sean inversibles: esto es, necesariamente existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $A - \mu_i I$ no es inversible. El otras palabras, μ_i es un autovalor de A y, evaluando la igualdad (3) en μ_i, es inmediato que $p(\mu_i) = \lambda$. Concluimos de esta forma que $\sigma(p(A)) \subseteq p(\sigma(A)$. □

2. Si $f : V \to V$ es un endomorfismo de un espacio vectorial V de dimensión finita y positiva sobre un cuerpo k, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Los únicos subespacios f-invariantes de V son 0 y V.

(b) Todo vector $v \in V$ no nulo es cíclico.

(c) El polinomio característico χ_f es irreducible.

Solución. ($a \implies b$) Sea $v \in V$ un vector no nulo. El subespacio cíclico $\langle v\rangle_f$ generado por v es f-invariante y no es nulo, así que por hipótesis tiene que ser necesariamente igual a V: v es entonces un vector cíclico.

($b \implies a$) Sea $S \subseteq V$ un subespacio f-invariante y supongamos que $S \neq 0$. Existe un vector $v \in S$ no nulo y, como S es f-invariante, se tiene que $\langle v\rangle_f \subseteq S$. Por hipótesis, $\langle v\rangle_f = V$, así que esto muestra que $S = V$.

($b \implies c$) Supongamos que $\chi_f = pq$ con $p, q \in \mathbb{C}[X]$ dos polinomios no constantes. Sabemos que $0 = \chi_f(f) = p(f)q(f)$ y en consecuencia no puede ser que tanto $p(f)$ como $q(f)$ sean inversibles. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p(f)$ no es un isomorfismo.

Como V tiene dimensión finita, $p(f)$ no es inyectiva y existe entonces un vector $v \in V$ no nulo tal que $p(f)(v) = 0$. Esto implica que el polinomio minimal $m_{f,v}$ de f con respecto a v divide a p y, en particular —como por hipótesis v es un vector cíclico— tenemos que

$$\dim V = \dim\langle v\rangle_f = \deg m_{f,v} \leq \deg p < \deg \chi_f = \dim V.$$

Esto es absurdo.

($c \implies b$) Sea $v \in V$ un vector no nulo. Como χ_f es irreducible y el polinomio minimal $m_{f,v}$ de f con respecto a v lo divide, debe ser $m_{f,v} = \chi_f$. En particular, el grado de $m_{f,v}$, que coincide con $\dim\langle v\rangle_f$, es igual a $\deg \chi_f = \dim V$. Esto implica que $\langle v\rangle_f = V$, esto es, que v es un vector cíclico para f.

($c \implies a$) Sea $S \subseteq V$ un subespacio f-invariante no nulo, y sea $v \in S$ un vector no nulo. El polinomio $m_{f,v}$ minimal de f con respecto a v divide a χ_f y tiene grado positivo, así que la hipótesis implica que $m_{f,v} = \chi_f$. Entonces

$$\dim S \geq \dim\langle v\rangle_f = \deg m_{f,v} = \deg \chi_f = \dim V$$

y, en consecuencia, $S = V$.

($c \implies a$) Supongamos que existe un subespacio $S \subset V$ f-invariante, propio y no nulo, de manera que si $n = \dim V$ y $m = \dim S$ se tiene que $0 < m < n$. Sea $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V tal que $\{v_1, \dots, v_m\}$ es una base de S. Como S es f-invariante, sabemos que existen matrices $A \in M_m(k)$, $B \in M_{n-m}(k)$ y $C \in M_{m,n-m}(k)$ tales que

$$[f]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

y, en particular, es inmediato que $\chi_f = \chi_A\chi_B$. Como χ_A y χ_B son polinomios no constantes, esto muestra que χ_f es reducible. $\square$

3. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique su respuesta.

(i) Si $A \in M_6(k)$ es una matriz tal que $A^3 = 0$, entonces todo menor de 4×4 tiene determinante nulo.

(ii) Existe una matriz $B \in M_3(\mathbb{C})$ tal que $\mathrm{adj}(B) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Solución. (a) FALSO. El cubo de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es nulo pero su rango es 4.

¿De dónde sale este ejemplo? Sea $A \in M_6(\mathbb{C})$ una matriz tal que $A^3 = 0$ y cuyos menores $4x4$ se anulan. Entonces A es nilpotente, su polinomio minimal divide a X^3 y su rango es a lo sumo 3. Esto implica que su núcleo tiene dimensión al menos 3 y, entonces, que su forma de Jordan tiene al menos 3 bloques. Basta entonces, para dar un contraejemplo a la afirmación del enunciado, encontrar una matriz nilpotente de índice ≤ 3 y cuya forma normal de Jordan tiene menos que 3 bloques: es inmediato que *todas* las matrices que satisfacen estas dos condiciones son semejantes a la matriz dada arriba.

(b) VERDADERO. Sea C la matriz del enunciado. Sea $a \in \mathbb{C}$ tal que $a^2 = \det(C)$ y sea $B = aC^{-1}$. Entonces $\det(B) = a^3 \det(C)^{-1} = a$ y

$$C = aB^{-1} = a\frac{\operatorname{adj}(B)}{\det(B)} = \operatorname{adj}(B).$$

Esto nos dice que B es una matriz cuya adjunta es C. □

4. Sea $f : \mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^8$ una transformación lineal cuyo polinomio característico es $\chi_f(X) = X^8 - 2X^7 + 2X^5 - X^4$ y tal que

$$\dim \ker f^3 = \dim \ker(f - \mathrm{id}).$$

Encuentre todas las posibles formas de Jordan de f.

Solución. El polinomio characterístico es $\chi_f(X) = X^4(X-1)^3(X+1)$.

Si en la forma de Jordan hubiera más de un bloque para el autovalor 0, entonces todos esos bloques tendrían tamaño menor que 4, el subespacio correspondiente estaría contenido en el núcleo de f^3, y tendríamos que $4 = \dim \ker f^3 = \dim \ker(f - \mathrm{id})$. Habría entonces cuatro bloques correspondientes al autovalor 1, lo que es absurdo, ya que la multiplicidad de 1 como raíz de χ_f es 3.

Vemos así que solamente puede haber *un* bloque para el autovalor 0, y entonces $3 = \dim \ker f^3 = \dim \ker(f - \mathrm{id})$. Esto nos dice que hay 3 bloques correspondientes al autovalor 1: como la multiplicidad de 1 como raíz de χ_f es también 3, concluimos que esos tres bloques son de 1×1.

Finalmente, como -1 es una raíz simple de χ_f, hay exactamente un bloque de 1×1 para ese autovalor. En definitiva, la forma de Jordan de f es

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
0 &&&&&&& \\
1 & 0 &&&&&& \\
& 1 & 0 &&&&& \\
&& 1 & 0 &&&& \\
\hline
&&&& \boxed{1} &&& \\
&&&&& \boxed{1} && \\
&&&&&& \boxed{1} & \\
&&&&&&& -1
\end{array}\right)$$

5. Mostrar que existe un producto interno en $\mathbb{R}^3$ para el cual

$$(1,1,0) \perp (0,1,1),$$
$$\langle (1,0,-1),(1,3,2)\rangle^{\perp} = \langle (1,2,3)\rangle,$$
$$\|(1,0,-1)\|^2 = 5 \text{ y } \|(1,2,3)\|^2 = 1.$$

Determinar $\|(3,4,5)\|$.

Solución. Sean a, $b \in \mathbb{R}$ dos números positivos tales que $a^2+b^2=5$.

Sean $v_1 = \frac{1}{a}(1,1,0)$, $v_2 = \frac{1}{b}(0,1,1)$ y $v_3 = (1,2,3)$. Entonces $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y sabemos que existe exactamente un producto interno $\langle -,- \rangle$ en $\mathbb{R}^3$ para el cual $\mathscr{B}$ es ortonormal. Veamos que se satisfacen las condiciones:

- $(1,1,0) = av_1 \perp bv_2 = (0,1,1)$;
- $(1,0,-1) = av_1 - bv_2 \perp v_3 = (1,2,3)$;
- $(1,3,2) = av_2 + 2bv_2 \perp v_3 = (1,2,3)$;
- $\|(1,0,-1)\|^2 = \|av_1 - bv_2\|^2 = a^2+b^2 = 5$;
- $\|(1,2,3)\|^2 = \|v_3\|^2 = 1$;

Esto prueba la existencia. Por otro lado,

$$\|(3,4,5)\|^2 = \|av_1 - bv_2 + 2v_3\|^2 = a^2+b^2+4 = 9,$$

así que $\|3,4,5\| = 3$. $\square$