Álgebra Lineal
Primer Cuatrimestre — 2011

Primer parcial

Apellido y nombre: ....
L.U.: .... Hojas: ....

---

1. (Desigualdad de Sylvester) Si $f : V \to W$ y $g : W \to U$ son aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita, entonces

$$\operatorname{rg} g + \operatorname{rg} f \leq \operatorname{rg}(g \circ f) + \dim W.$$

Solución. Aplicando el teorema de la dimensión a la restricción $g|_{\operatorname{im} f} : \operatorname{im} f \to \operatorname{im}(g \circ f)$, que es sobreyectiva, vemos que

$$\dim \ker(g|_{\operatorname{im} f}) + \dim \operatorname{im}(g \circ f) = \dim \operatorname{im} f.$$

Por otro lado, como $\ker(g_{\operatorname{im} f}) \subseteq \ker g$,

$$\dim \ker(g|_{\operatorname{im} f}) \leq \dim \ker g = \dim W - \dim \operatorname{im} g.$$

De estas dos ecuaciones, entonces, que

$$\dim \operatorname{im} f - \dim \operatorname{im}(g \circ f) \leq \dim W - \dim \operatorname{im} g,$$

que es la desigualdad del enunciado. □

2. Sean $p, q : V \to V$ dos proyectores.

(a) Muestre que la composición $g \circ f$ puede no ser un proyector.

(b) Pruebe que las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

  (i) $g \circ f$ es un proyector y $f \circ g = g$.

  (ii) $\operatorname{im} g \subseteq \operatorname{im} f$.

Solución. (a) Tomemos $V = \mathbb{R}^3$ y sean f, $g : V \to V$ tales que para todo $(x, y, z) \in V$ es $f(x, y, z) = (0, x + y, 0)$ y $g(x, y, z) = (0, 0, y + z)$. Es inmediato verificar que f y g son proyectores, y que $g \circ f$ no lo es porque $g \circ f \neq 0 = (g \circ f)^2$.

(b) Por hipótesis, $f(g(v)) = g(v)$ para todo $v \in V$, así que $\operatorname{im} g \subseteq \operatorname{im} f$. Esto prueba que ($i \implies ii$). Para ver la recíproca, sea $v \in V$. Entonces $g(v) \in \operatorname{im} g \subseteq \operatorname{im} f$, así que $f(g(v)) = g(v)$, y entonces

$$(g \circ f)^2(v) = g(f(g(f(v)))) = g(g(f(v))) = g(f(v)) = (g \circ f)(v).$$

Así, $(g \circ f)^2 = g \circ f$. □

3. Sea $n \geq 1$. Sean $x_0, \dots, x_n$ números reales distintos dos a dos y, para cada $i \in \{0,\dots,n\}$, consideremos la función $\varepsilon_i : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \to \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon_i(p) = p(x_i)$ para cada $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$.

(a) El conjunto $\mathscr{B}^* = \{\epsilon_0, \dots, \epsilon_n\}$ es una base de $\mathbb{R}[x]^*_{\leq n}$.

(b) Sea $\mathscr{B} = \{P_0, \dots, P_n\}$ la base de $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ cuya base dual es $\mathscr{B}^*$. Sean $y_0, \dots, y_n$ números reales y sea

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i P_i.$$

Muestre que P es el único polinomio de $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ tal que $P(x_i) = y_i$ para todo $i \in \{0,\dots,n\}$.

(c) Pruebe que existen números reales $a_0, \dots, a_n$ tales que para todo $P \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ se tiene que

$$\int_0^1 P(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i P(x_i).$$

Solución. (a) Supongamos que $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ son tales que $\sum_{i=0}^n \alpha_i \epsilon_i = 0$. Si $j \in \{0,\dots,n\}$, entonces $0 = (\sum_{i=0}^n \alpha_i \epsilon_i)(X^j)i = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i^j$. Los escalares $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ satisfacen las $n+1$ relaciones

$$\begin{aligned}
x_0^0\alpha_0 + x_1^0\alpha_1 + \cdots + x_n^0\alpha_n &= 0,\\
x_0^1\alpha_0 + x_1^1\alpha_1 + \cdots + x_n^1\alpha_n &= 0,\\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad & \vdots \quad \vdots\\
x_0^n\alpha_0 + x_1^n\alpha_1 + \cdots + x_n^n\alpha_n &= 0.
\end{aligned}$$

Como es no nulo el determinante de la matriz de van der Monde

$$\begin{pmatrix} x_0^0 & x_1^0 & \cdots & x_n^0 \\ x_0^1 & x_1^1 & \cdots & x_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix},$$

esto implica que $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Esto nos dice que $\mathscr{B}^*$ es linealmente independiente. Como $\mathscr{B}^*$ tiene $n+1 = \dim \mathbb{R}[X]^*_{\leq n}$ elementos, esto es suficiente para concluir que es una base de $\mathbb{R}[X]^*_{\leq n}$.

(b) Si $j \in \{0,\dots,n\}$, entonces $P(x_j) = \varepsilon_j(P) = \sum_{i=0}^n y_i \varepsilon_j(P_i) = \sum_{i=0}^n y_i \delta_{j,i} = y_j$. Esto nos dice que el polinomio P satisface las condiciones deseadas.

Si Q es *otro* polinomio que las satisface, entonces $P - Q$ es un polinomio se anula en $x_0, \dots, x_n$. Esto es, $P - Q$ tiene $n+1$ raíces distintas y tiene grado a lo sumo n, debe ser $P - Q = 0$. Esto prueba la unicidad.

(c) La función $I : P \in \mathbb{R}[X]_{\leq n} \mapsto \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$ es una función lineal, así que $I \in \mathbb{R}[X]^*_{\leq n}$. Como $\mathscr{B}^*$ es una base de $\mathbb{R}[X]^*_{\leq n}$, existen escalares $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que $I = \sum_{i=0}^n a_i \varepsilon_i$. Esto significa que si $P \in \mathbb{R}[X]_{\leq n}$, entonces

$$\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = I(P) = (\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i)(P) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i(P) = \sum_{i=1}^{n} a_i P(x_i).$$

Esto verifica la afirmación del enunciado. $\square$

4. Sea $M \in M_2(\mathbb{R})$ una matriz tal que $\mathscr{B} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right), M \right\}$ es una base de $M_2(\mathbb{R})$ y sea $\mathscr{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ la base dual.

(a) Encuentre las coordenadas en la base $\mathscr{B}^*$ de una base de $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle^\circ$.

(*b*) Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $\langle A \rangle^\circ = \langle \varphi_1 + \varphi_3, \varphi_1 - \varphi_2 + 2\varphi_4, 2\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 \rangle$. Muestre que entonces $\mathscr{B}' = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right), A \right\}$ es una base de $M_2(\mathbb{R})$.

5. Sean $v_1 = (1, -2, 3, 0)$, $v_2 = (2, 4, -1, 1)$, $v_3 = (4, 0, 5, 1)$, $v_4 = (0, 8, -7, 1) \in \mathbb{R}^4$. Determine todos las ternas vectores w_1, w_2 y $w_3 \in \mathbb{R}^3$ tales que existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ con

$$
\begin{aligned}
f(v_1) &= w_1 - w_2 + 2w_3, & \qquad f(v_3) &= w_1 + 2w_3, \\
f(v_2) &= w_1 + w_2 - w_3, & \qquad f(v_4) &= 4w_3.
\end{aligned}
$$