ÁLGEBRA LINEAL
Primer Cuatrimestre — 2011
Primer parcial

APELLIDO Y NOMBRE: ....

L.U.: .... HOJAS: ....

---

1. Sean $f : V \to W$ y $g : V \to W'$ transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Existe una transformación lineal $h : W \to W'$ tal que $h \circ f = g$.

(b) $\ker f \subseteq \ker g$.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ W \arrow[rr, dotted, "h"] & & W' \end{tikzcd}$$

2. Consideremos la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ y sea $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ su base dual. Sean $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ polinomios tales que

$$\langle p_1, p_2\rangle^\circ = \langle \varphi_1 + \varphi_3, \varphi_1 - \varphi_2 + 2\varphi_4\rangle,$$
$$\langle p_3, p_4\rangle^\circ = \langle 2\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4, \varphi_1 + \varphi_2 + 4\varphi_4\rangle.$$

(a) Decida si el conjunto $\{p_1, p_2, 1 + 3x - x^2 + x^3\}$ es linealmente independiente.

(b) Determine $\dim\langle p_1, p_2, p_3, p_4\rangle$.

3. Sean V un k-espacio vectorial y sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de B.

(a) Muestre que $B' = \{v_1 + 2v_3, v_1 + v_2 + v_3, 2v_1 + 3v_3\}$ también es una base de V.

(b) Definamos transformaciones lineales f, $g : V \to V$ tales que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad |g|_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre las coordenadas de $g(v_2 - v_3)$ en la base B' y una base del espacio $U = \{v \in V : f(v) = g(v)\}$.

4. Sea $n \geq 0$. Para cada $k \in \{0, \dots, n\}$ definimos una función lineal $\varphi_k \in (\mathbb{R}[x]_{\leq n})^*$ de manera que

$$\varphi_k(p) = \tfrac{1}{k!}(x^k p)^{(k)}(1) \text{ para cada } p \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}.$$

(a) El conjunto $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ es una base de $(\mathbb{R}[x]_{\leq n})^*$.

Sugerencia. Calcule las coordenadas de φ_k en la base dual de $\{1, x-1, \dots, (x-1)^n\}$.

(b) La matriz $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ tal que $A_{ij} = \binom{i+j}{i}$ para todo $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ es inversible.

Sugerencia. Calcule las coordenadas de φ_k en la base dual de $\{1, x, \dots, x^n\}$.

5. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta.

(a) Si $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces $\operatorname{rg}(v^t w) \leq 1$.

(b) Sean S, S', T y T' subespacios de un k-espacio vectorial V. Se sabe que $T \subseteq T'$, $S' \subseteq S$ y $\dim S + T = \dim S' + T'$, entonces $S + T = S' + T'$.

(c) Si α, β y γ son números reales no nulos y distintos, entonces el conjunto

$$\{(\alpha^3, \alpha^4, \alpha^5), (\beta^3, \beta^4, \beta^5), (\gamma^3, \gamma^4, \gamma^5)\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3$.