Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre — 2011

Primer parcial

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Hojas: ....

---

1. Sean $f : V \to W$ y $g : V \to W'$ transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Existe una transformación lineal $h : W \to W'$ tal que $h \circ f = g$.

(b) $\ker f \subseteq \ker g$.

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ W \arrow[rr, dotted, "h"] & & W' \end{tikzcd}$$

Solución. ($a \implies b$) Si $v \in \ker f$, entonces $g(v) = h(f(v)) = h(0) = 0$, así que $v \in \ker g$.

($b \implies a$) Sean

- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\ker f$,
- $v'_1, \ldots, v'_m \in V$ tales que $\{v_1, \ldots, v_n, v'_1, \ldots, v'_m\}$ es una base de $\ker g$, y
- $v''_1, \ldots, v''_r \in V$ tales que $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n, v'_1, \ldots, v'_m, v''_1, \ldots, v''_r\}$ es una base de V.

Es fácil ver que $\{f(v'_1), \ldots, f(v'_m), f(v''_1), \ldots, f(v''_r)\}$ es una base de $\operatorname{im} f$, así que existen $w_1, \ldots, w_s \in W$ tales que $\{f(v'_1), \ldots, f(v'_m), f(v''_1), \ldots, f(v''_r), w_1, \ldots, w_s\}$ es una base de W. En particular, existe una transformación lineal $h : W \to W'$ tal que

$$\begin{aligned} &h(f(v'_i)) = 0, && 1 \le i \le m; \\ &h(f(v''_i)) = g(v''_i), && 1 \le i \le r; \\ &h(w_i) = 0, && 1 \le i \le s. \end{aligned}$$

Esta definición muestra que $(h \circ f)(v) = g(v)$ para todo vector $v \in \mathscr{B}$, así que $h \circ f = g$. □

2. Consideremos la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{R}[x]_{\le 3}$ y sea $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ su base dual. Sean $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}[x]_{\le 3}$ polinomios tales que

$$\begin{aligned} \langle p_1, p_2 \rangle^\circ &= \langle \varphi_1 + \varphi_3, \varphi_1 - \varphi_2 + 2\varphi_4 \rangle, \\ \langle p_3, p_4 \rangle^\circ &= \langle 2\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4, \varphi_1 + \varphi_2 + 4\varphi_4 \rangle. \end{aligned}$$

(a) Decida si el conjunto $\{p_1, p_2, 1 + 3x - x^2 + x^3\}$ es linealmente independiente.

(b) Determine $\dim\langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle$.

Solución.

(a) Como los generadores de $\langle p_1, p_2 \rangle^\circ$ se anulan en $1 + 3x - x^2 + x^3$, este polinomio pertenece al subespacio $\langle p_1, p_2 \rangle$ y por lo tanto el conjunto es linealmente dependiente.

(b) Una forma de resolverlo es hallar la base dual de B y con ella los subespacios $\langle p_1, p_2 \rangle$ y $\langle p_3, p_4 \rangle$. Otra manera es usar las siguientes propiedades:

$$\dim(S) = 4 - \dim(S^\circ) \quad \text{y} \quad (S + T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ \text{ para cualesquieras } S, T \subset \mathbb{R}[x]_{\le 3} \text{ subespacios .}$$

Entonces $\dim\langle p_1,p_2,p_3,p_4\rangle = 4-\dim(\langle p_1,p_2\rangle+\langle p_3,p_4\rangle)^\circ = 4-\dim(\langle p_1,p_2\rangle^\circ\cap\langle p_3,p_4\rangle^\circ) = 4-1=3$, pues por el teorema de la dimensión

$$\dim(\langle p_1,p_2\rangle^\circ\cap\langle p_3,p_4\rangle^\circ) = \dim\langle p_1,p_2\rangle^\circ+\dim\langle p_3,p_4\rangle^\circ-\dim(\langle p_1,p_2\rangle^\circ+\langle p_3,p_4\rangle^\circ) = 2+2-3=1.$$

3. Sean V un k-espacio vectorial y sea $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ una base de B.

(a) Muestre que $B'=\{v_1+2v_3, v_1+v_2+v_3, 2v_1+3v_3\}$ también es una base de V.

(b) Definamos transformaciones lineales f, $g : V\to V$ tales que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad |g|_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Encuentre las coordenadas de $g(v_2-v_3)$ en la base B' y una base del espacio $U=\{v\in V : f(v)=g(v)\}$.

Solución.

(a) B' es una base de V pues la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ tiene rango 3, y la notamos $C(B',B)$.

(b) Como $[g(v_2-v_3)]_B = |g|_{B'B}[v_2-v_3]_{B'} = |g|_{B'B}(-1,1,0)^t = (0,1,-1)^t$, entonces $g(v_2-v_3)=v_2-v_3$ y $[g(v_2-v_3)]_{B'}=(-1,1,0)$. Para hallar una base de U, observar que $U=Ker(f-g)$ y como $|f-g|_{B'B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2\\ -4 & -2 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$, se buscan las coordenadas en B' de una base de U y esta resulta $\{3v_1-v_2+5v_3\}$.

4. Sea $n\geq 0$. Para cada $k\in\{0,\dots,n\}$ definimos una función lineal $\varphi_k\in(\mathbb{R}[x]_{\leq n})^*$ de manera que

$$\varphi_k(p)=\tfrac{1}{k!}(x^k p)^{(k)}(1) \text{ para cada } p\in\mathbb{R}[x]_{\leq n}.$$

(a) El conjunto $\{\varphi_0,\dots,\varphi_n\}$ es una base de $(\mathbb{R}[x]_{\leq n})^*$.

Sugerencia. Calcule las coordenadas de φ_k en la base dual de $\{1,x-1,\dots,(x-1)^n\}$.

(b) La matriz $A\in M_{n+1}(\mathbb{R})$ tal que $A_{ij}=\binom{i+j}{i}$ para todo $i,j\in\{0,1,\dots,n\}$ es inversible.

Sugerencia. Calcule las coordenadas de φ_k en la base dual de $\{1,x,\dots,x^n\}$.

Solución. Las coordenadas de φ_k en la base dual de $\{1,x-1,\dots,(x-1)^n\}$ son $(\varphi_k(1),\varphi_k(x-1),\dots,\varphi_k((x-1)^n))$. Tenemos que calcular $\varphi_k((x-1)^l)$, esta cuenta la hacemos de forma explicita y da

$$\varphi_k((x-1)^l)=\begin{cases}0, & \text{si } l>k;\\ \binom{k}{k-l}, & \text{si } l\leq k.\end{cases}$$

Una forma de ver esto es escribir, usando el binomio de Newton:

$$x^k=(x-1+1)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(x-1)^i.$$

Multiplicando por $(x-1)^l$ queda $x^k(x-1)^l=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(x-1)^{i+l}$, derivando, evaluando en 1 y dividiendo por $k!$ se sigue la afirmación. Como la matriz que queda es triangular inferior y tiene unos en la diagonal esta matriz es inversible y los φ_k forman una base.

Para la segunda parte tenemos que calcular $\varphi_k(x^l)=\frac{1}{k!}(x^{k+l})^{(k)}(1)=\binom{k+l}{l}$. De esta forma vemos que la matriz del enunciado es una matriz de cambio de base y por lo tanto es inversible.

5. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta.

(a) Si $v=(v_1,v_2)$, $w=(w_1,w_2)\in\mathbb{R}^2$, entonces $\mathrm{rg}(v^t w)\leq 1$.

(b) Sean S, S', T y T' subespacios de un k-espacio vectorial V. Se sabe que $T\subseteq T'$, $S'\subseteq S$ y $\dim S+T=\dim S'+T'$, entonces $S+T=S'+T'$.

(c) Si α, β y γ son números reales no nulos y distintos, entonces el conjunto

$$\{(\alpha^3, \alpha^4, \alpha^5), (\beta^3, \beta^4, \beta^5), (\gamma^3, \gamma^4, \gamma^5)\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución.

(a) Este item es verdadero. Hay varias formas de probarlo:

- $\mathrm{rg}(v^t w) \leq \mathrm{mín}\{\mathrm{rg}(v^t), \mathrm{rg}(w)\} = 1$.
- $v^t w = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 \end{pmatrix}$ y vemos que las dos filas son multiplos de w y por lo tanto el rango es menor o igual a 1.

(b) Este es falso. Un contraejemplo posible es con $V = \mathbb{R}^4$. Tomamos

$$T = \langle e_1 \rangle, \quad T' = \langle e_1, e_2 \rangle, \quad S = \langle e_3, e_4 \rangle, \quad S' = \langle e_3 \rangle$$

(c) Este item es verdadero. Es claro que $\{(\alpha^3, \alpha^4, \alpha^5), (\beta^3, \beta^4, \beta^5), (\gamma^3, \gamma^4, \gamma^5)\}$ es linealmente independiente si y solo si $\{(1, \alpha, \alpha^2), (1, \beta, \beta^2), (1, \gamma, \gamma^2)\}$ lo es. Que este último conjunto es independiente es un ejercicio de la guia.