Álgebra Lineal
Primer Cuatrimestre — 2011

Primer parcial

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Hojas: ....

---

1. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo diagonalizable (notar que $\dim V$ no es necesariamente finita).

Demostrar que $\dim\langle v, f(v), f^2(v), \cdots\rangle < +\infty$.

¿Es cierto que $\dim\langle W, f(W), f^2(W), \cdots\rangle < +\infty$ para $W \subseteq V$ de dimensión finita arbitrario?

Nota: f es diagonalizable quiere decir que existe una base de V formada por autovectores de f.

Solución. Escribo a v como una combinación lineal finita de autovectores. Es claro que $\langle v, f(v), f^2(v), \cdots\rangle$ está contenido en el subespacio generado por esos autovectores y que, por lo tanto, tiene dimensión finita. El segundo caso es análogo.

2. Sean V un k-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \to V$ un endomorfismo.

(a) Si f tiene un vector cíclico entonces $m_f = \chi_f$.

(b) Si $V = S \oplus T$ con S y T f-invariantes, $v \in S$ es un vector cíclico de $f|_S$, $w \in T$ es un vector cíclico de $f|_T$ y $m_{f,v}$ y $m_{f,w}$ son coprimos entonces $v + w$ es un vector cíclico de f.

(c) Si $m_f = \chi_f$ entonces f tiene un vector cíclico.

Solución. Sea $n = \dim V$.

(a) Si f tiene un vector cíclico $\exists v \in V$ tal que $\{v, fv, f^2v, \ldots, f^{n-1}v\}$ es linealmente independiente. Por lo tanto $\{\mathrm{Id}, f, \ldots, f^{n-1}\}$ es linealmente independiente. Se sigue que $m_f = \chi_f$.

(b) Sea p tal que $p(f)(v + w) = 0$, entonces $p(f)(v) = -p(f)(w)$, como S y T están en suma directa se tiene que $p(f)(v) = p(f)(w) = 0$. En consecuencia, usando que los minimales son coprimos, se sigue que $m_{f,v}m_{f,w} \mid p$. Es facil ver que en este caso $m_{f,v+w} = m_{f,v}m_{f,w}$ y comparando dimensiones vemos que $v + w$ es un vector cíclico.

(c) Se sigue por induccion de **2**(b) y de la descomposición de χ_f en potencias de irreducibles.

3. Sean V un k-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \to V$ un endomorfismo. Si $V = S \oplus T$ con S y T f-invariantes entonces $m_f = mcm\{m_{f|_S}, m_{f|_T}\}$.

Solución. Sea p tal que $p(f)(v+w)=0$ para todo $v\in S$ y $w\in T$, usando la linealidad de $p(f)$ vemos que $p(f)(v)=-p(f)(w)$ y como S y T están en suma directa se tiene que $p(f)(v)=p(f)(w)=0$. En consecuencia, $m_{f,v}$y $m_{f,w}$ dividen a p. El resultado se sigue facilmente.

4. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta:

(a) Sea $A\in M_6(K)$ tal que $A^3=0$, entonces todo menor de 4×4 tiene determinante nulo.

(b) Sea $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\1&2&1\\1&2&3\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$, entonces existe $C\in M_3(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{adj}(C)=A$.

Solución.

(a) Es falso pues como $m_A(x)$ divide a x^3, planteando las osibles formas de Jordan de A se ve que una posible es aquella con ds bloques de Jordan nilpotentes de 3×3 y esta tiene rango 4. Luego A tendría rango 4, y por el ejercicio 10 de la practica 5 existe un menor de 4×4 de determinante no nulo.

(b) Es verdadero, busquemos C: Como $\det(A)=4$, $C.A=C.\operatorname{adj}(C)=\det(C).Id$, con lo cual $\det(C).4=\det(C)^3$. Así, si C inversible, $\det(C)=2$ o $\det(C)=-2$. Pero además, $C\frac{1}{2}A=Id$ o $C\frac{-1}{2}A=Id$ con lo cual $C=2A^{-1}$ o bien $C=-2A^{-1}$ y puede chequearse que ambas sirven cumplen lo pedido.

5. Sea $f:\mathbb{C}^3\longrightarrow\mathbb{C}^3$ transformación lineal tal que, para una base $\beta=\{v_1,v_2,v_3\}$ de $\mathbb{C}^3$ vale

$$f(v_1)=(1,0,2),\ f(v_2)=(-1,2,-1) \text{ y } f(v_3)=(-1,0,1).$$

Hallar $\det(f)$ sabiendo que $\det(C(\beta',E))=12$ para una nueva base

$$\beta'=\{2v_1+v_2+4v_3, v_1+2v_2+v_3, v_1+2v_2-v_3\}.$$

Solución. A partir de $\det(C(\beta',E))=12$ y haciendo operaciones de filas vemos que $\det(C(\beta,E))=-2$, con lo cual

$$\det(f)=\det(|f|_E)=\det(|f|_{\beta E}\,C(E,\beta))=\frac{-1}{2}\det(|f|_{\beta E})=\frac{-1}{2}6=-3.$$

6. Sea $A=\begin{pmatrix}7&0&4\\-3&-1&2\\12&0&-7\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$, decidir si $\{Id, A^{10}+A^9-A^6-A^5+3A, A^3\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

Solución. Como $m_A(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, usando el teorema de Hamilton-Cayley tenemos que $A^{10} + A^9 - A^6 - A^5 + 3A = 3A$ y $A^3 = -A^2 + A + Id$, con lo cual se puede ver que son linealmente independientes.

7. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ una transformación lineal tal que

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 2(ax^3 + (3b + 2d)x^2 + (4a - c)x - (4b + 3c)).$$

Hallar $f^n(p(x))$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$.

Solución. Usando que $\chi_A(x) = (x-2)^2(x+2)^2$, y que los espacios de autovectores son $V_2 = \langle (1,,2,0),(0,1,0,-1) \rangle$ y $V_{-2} = \langle (0,0,1,0),(0,-1,0,2) \rangle$, vemos que f es diagonalizable y el resto es una cuenta.

8. (*a*) Sea $f : \mathbb{C}^8 \longrightarrow \mathbb{C}^8$ transformación linea tal que $\chi_f(x) = x^8 - 2x^7 + 2x^5 - x^4$. Hallar todas las posibles formas de Jordan sabiendo que

$$\dim(Ker(f^3)) = \dim(Ker(f - Id)).$$

(*b*) Sea $f : \mathbb{C}^7 \longrightarrow \mathbb{C}^7$ transformación linea tal que $f^6 - 2f^5 + f^4 = 0$. Hallar todas las posibles formas de Jordan sabiendo que

$$\dim(Ker(f^2)) < \dim(Ker(f^3)) = \dim(Ker(f - Id)).$$

Solución. En el item **8**(*a*), como $\dim(Ker(f^3)) \geq 3$ (el 0 es autovalor cuádruple, entonces $\dim(Ker(f^3)) = 4$ (genera todo el subespacio asociado) a menos que hubiera un bloque de 4×4 en cuyo caso es 3) y $\dim Ker(f - Id)$ es a lo sumo 3 (el 1 es autovalor triple), debe ser 3, y por ende la forma de Jordan asociada tiene que ser

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En el item **8**(*b*) $\dim(Ker(f^3)) \geq 3$ pues $\dim(Ker(f^2)) < \dim(Ker(f^3))$ y esto nos dice que $\{0\} \subsetneq Ker(f) \subsetneq Ker(f^2) \subsetneq Ker(f^3)$. Pero como la matriz es de 7×7, no pueden ser $\dim(Ker(f^3)) = \dim Ker(f - Id) = 4$, con lo cual valen 3 y por lo tanto las posibles formas de Jordan son

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Definir un producto interno en $\mathbb{R}^3$ que cumpla:

(a) $(1,1,0) \perp (0,1,1)$.

(b) $\langle (1,0,-1),(1,3,2) \rangle^{\perp} = \langle (1,2,3) \rangle$.

(c) $\|(1,0,-1)\|^2 = 5$ y $\|(1,2,3)\|^2 = 1$.

Para todo producto interno que cumpla lo anterior, calcular $\|(3,4,5)\|$.

Solución. Como $(1,1,0),(0,1,1) \in \langle (1,0,-1),(1,3,2) \rangle$, el conjunto $\{(1,1,0), \frac{(0,1,1)}{\sqrt{5}}, (1,2,3)\}$ es una base ortogonal y los últimos dos vectores son de norma 1. La norma del primero puede elegirse, y para cada elección esto determina un producto interno. Pero para todos ellos, como $(3,4,5) = (1,0,-1) + 2(1,2,3)$, que son ortogonales, su norma es 3 pues $\|(3,4,5)\|^2 = \|(1,0,-1) + 2(1,2,3)\|^2 = \|(1,0,-1)\|^2 + 4\|(1,2,3)\|^2 = 9$.

10. Sean $f, g : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ transformaciones lineales cuyas matrices en la base canónica son:

$$| f |_E = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } | g |_E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Hallar una base de $\mathbb{C}^3$ que diagoalice a ambas.

Solución. Como las matrices conmutan, existe dicha base y se puede osntruir siguiendo los pasos de la demostración del ejercicio 11 de la practica 7: Para f sus espacios de autovectores son $V_{-1} = \langle (-2,0,1) \rangle$ y $V_1 = \langle (1,1,0),(3,0,-1) \rangle$. Diagonalizar g sobre V_{-1} es fácil, su generador es un autovector de g de autovalor 2, y si tomamos h como g restringido a V_1 (y $\beta' = \{(1,1,0),(3,0,-1)\}$), $| h |_{\beta'} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Asi conseguimos las coordenadas de los autovectores para g: $(0,1)$ son las coordenadas del autovector de autovalor 0 y $(1,-1)$ para el autovector de autovalor -2. Esas coordenadas pertenecen a los vectores $(3,0,-1)$ y $(-2,1,1)$ con lo cual una base en la que ambos se diagonalizan sería $\beta = \{(3,0,-1),(-2,1,1),(-2,0,1)\}$ y en ella tenemos que

$$| f |_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } | f |_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

11. Sea $f : \mathbb{C}^{12} \longrightarrow \mathbb{C}^{12}$ transformación lineal tal que $m_f(x) = (x-1)^4(x+1)^2x$, $\text{rg}(f - Id)^3 = 6$ y $\dim Ker(f + Id) = 3$. Hallar todas las posibles formas de Jordan de f.

Solución. Por los factores del minimal sabemos quedebe haber al menos un bloque de 4×4 de autovalor 1, uno de 2×2 de autovalor -1 y uno de 1×1 de autvalor cero (ningún otrautovalor o bloque de tamaño mayor). Como $\dim Ker(f + Id) = 3$, hay solo 3 bloques asociados a ese autovalor, pero esto también nos dice que es un autovalor al menos cuadruple (pues la dimensión de $Ker(f + Id)^2 > 3$. Entonces, el autovalor 1 aparece a lo sumo 7 veces, y como tiene que estar al menos 7 veces (pues $\dim Ker(f - Id)^4 > 12 - \text{rg}(f - Id)^3 = 6$. Así, $\chi_f(x) = (x-1)^7(x+1)^4 x$ y con lo que ya sabíamos de los bloques, los asociados al -1 y 0 quedaron determinados, mientras que para el 1 un bloque de 4×4 y cualquier configuración de 3×3 cumple lo pedido. Entonces, las posibles formas de Jordan son:

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&&&&&&&& \\
1&1&0&0&&&&&&&& \\
0&1&1&0&&&&&&&& \\
0&0&1&1&&&&&&&& \\
&&&&1&0&0&&&&& \\
&&&&1&1&0&&&&& \\
&&&&0&1&1&&&&& \\
&&&&&&&-1&0&&& \\
&&&&&&&1&-1&&& \\
&&&&&&&&&-1&& \\
&&&&&&&&&&-1& \\
&&&&&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&&&&&&&& \\
1&1&0&0&&&&&&&& \\
0&1&1&0&&&&&&&& \\
0&0&1&1&&&&&&&& \\
&&&&1&0&0&&&&& \\
&&&&1&1&0&&&&& \\
&&&&0&0&1&&&&& \\
&&&&&&&-1&0&&& \\
&&&&&&&1&-1&&& \\
&&&&&&&&&-1&& \\
&&&&&&&&&&-1& \\
&&&&&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&&&&&&&& \\
1&1&0&0&&&&&&&& \\
0&1&1&0&&&&&&&& \\
0&0&1&1&&&&&&&& \\
&&&&1&0&0&&&&& \\
&&&&0&1&0&&&&& \\
&&&&0&0&1&&&&& \\
&&&&&&&-1&0&&& \\
&&&&&&&1&-1&&& \\
&&&&&&&&&-1&& \\
&&&&&&&&&&-1& \\
&&&&&&&&&&&0
\end{pmatrix}$$

12. Sea f un endomorfismo en un espacio vectorial V de dimensión finita. Probar que son equivalentes:

(a) f es simple (es decir los únicos subespacios f-invariantes son $\{0\}$ y V).

(b) χ_f es irreducible.

(c) Todo vector $v \neq 0$ es T-cíclico (es decir, los vectores $\{v, f(v), f^2(v), \ldots\}$ generan V).

13. Sea T un endomorfismo en un espacio con producto interno H.

(a) Probar que $Ker(T^*T) = Ker(T)$.

(b) Probar que si T es normal, entonces $Ker(T) = Ker(T^*)$.

(c) Probar que si T es unitario, entonces T es una isometría.

14. Sea T un proyector ortogonal en un espacio con producto interno H tal que $T^2 = T$.

(a) Probar que T^* es proyector.

(b) Probar que $Im(T) = Im(T^*)$.

(c) Probar que $Ker(T) = Ker(T^*)$.

(d) Deducir de lo anterior que T es autoadjunto.

15. Sea T un endomorfismo en un k-espacio vectorial de dimensión finita tal que $m_T = p_1^{r_1}...p_n^{r_n}$, donde los $p_i \in k[x]$ son irreducibles, mónicos y distintos entre sí. Sea $P_i : V \to V$ el proyector sobre $Ker(h_i^{r_i}(T))$ y de núcleo $\oplus_{j\neq i} Ker(h_j^{r_j}(T))$. Sean $g_1, ..., g_n \in k[x]$ tales que $f_1 g_1 + ... + f_n g_n = 1$, y definamos $P_i' = (f_i g_i)(T)$.

(a) Probar que P_i' es proyector y que $V = \oplus_{i=1}^n Im(P_i')$.

(b) Probar que $Im(P_i') \subseteq Ker(h_i^{r_i}(T))$.

(c) Probar que $V = \oplus_{i=1}^n Ker(h_i^{r_i}(T))$.

(d) Concluir de b) y c) que $Im(P_i') = Ker(h_i^{r_i}(T))$.

(e) Probar que $\oplus_{j\neq i} Ker(h_j^{r_j}(T)) = Ker(P_i)$.

(f) Deducir de d) y e) que $P_i = P_i'$ y que por lo tanto $P_i = q(T)$ para algún polinomio $q \in k[x]$.