Álgebra Lineal

Primer Cuatrimestre — 2011

Segundo parcial

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Hojas: ....

---

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$. Muestre que existe un producto interno en $\mathbb{C}^4$ con respecto al que A es un operador normal. Encuentre el proyector ortogonal $p : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ cuya imagen es el subespacio de $\mathbb{C}^4$ generado por los autovectores de A con autovalor real.

2. Sean x y y números reales. Calcule el determinante de la matriz $n \times n$

$$\begin{pmatrix} x & y & y & \dots & y \\ y & x & y & \dots & y \\ y & y & x & \dots & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & x \end{pmatrix}$$

3. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal.

(a) Si $\langle f(x), x \rangle = 0$ para todo $x \in V$, entonces $f = 0$.

(b) Si para todo $x \in V$ se tiene que $\langle f(x), x \rangle \in \mathbb{R}$, entonces f es autoadjunta.

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo k, sea $f : V \to V$ un endomorfismo y $p \in k[X]$. Entonces

$$p(f) \text{ es un isomorfismo } \iff p \text{ y el polinomio minimal } m_f \text{ son coprimos.}$$

5. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique su respuesta.

(i) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & e^2 & 2 & 1/7 \\ -2 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5/9 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $\det A^t A \neq 0$.

(ii) Si $\det A \neq 0$, entonces existe un polinomio $h \in k[X]$ tal que $\operatorname{adj}(A) = h(A)$.

(*iii*) Si $A \in M_7(\mathbb{C})$ es una matriz con coeficientes *enteros* y $\det A = 2$, entonces A^{-1} es una matriz con coeficientes enteros.