GEOMETRÍA PROYECTIVA

Segundo Cuatrimestre — 2011

Práctica 7: Curvas algebraicas proyectivas

1. Considere las curvas algebraicas en K^2 definidas por los siguientes polinomios:

(a) $Y - X^2$;
(b) $Y^2 - X^3 + X$;
(c) $Y^2 - X^3$;
(d) $Y^2 - X^3 - X^2$;
(e) $(X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$;
(f) $(X^2 + Y^2)^3 - X^2Y^2$.

Si $P = (0,0)$, calcule $I(P, F_i \cap F_j)$ para cada $i < j$.

2. Un punto simple P de una curva F es una *inflexión* si $I(P, F \cap L) \geq 3$, con L la recta tangente a F en P. Decimos que la inflexión es *ordinaria* si $I(P, F \cap L) = 3$ y que es *de orden superior* en otro caso.

(a) ¿Para qué valores de n posee la curva $Y - X^n = 0$ una inflexión en $P = (0,0)$ y de qué tipo es?

(b) Si $F = Y + aX^2 + \dots$ define una curva C y $P = (0,0)$, la recta tangente L a C en P es que $P = (0,0)$ tiene ecuación $Y = 0$. Muestre que P es un punto de inflexión de F si y sólo si $a = 0$.

Dé un criterio sencillo que sirva para calcular $I(P, F \cap L)$, y por lo tanto para determinar si P es una inflexión de orden superior.

3. Supongamos que P es un punto doble de una curva C de ecuación $F = 0$ y que C posee solo una tangente L en P.

(a) Muestre que $I(P, F \cap L) \geq 3$. Decimos que C tiene una *cúspide* en P cuando $I(P, F \cap L) = 3$.

(b) Si $P = (0,0)$ y L tiene ecuación $Y = 0$, entonces P es una cúspide si y sólo si $F_{XXX}(P) \neq 0$. Dé ejemplos.

(c) Si P es una cúspide de C, entonces hay una única componente de C que pasa por P.

4. Estudie las singularidades en los puntos $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ y $(0:0:1)$ de la curva proyectiva de ecuación

$$x^2y^5 - x^5y^2 - 2xy^5z + x^5z^2 + y^5z^2 - x^3yz^3 + 2\alpha x^2y^2z^3 - xy^3z^3 = 0$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$.

5. Encuentre los puntos singulares de las curvas proyectivas definidas por las ecuaciones:

(a) $xz^2 - y^3 + xy^2 = 0$;
(b) $(x + y + z)^3 - 27xyz = 0$;
(c) $x^2y^2 + 36xz^3 + 24yz^3 + 108z^4 = 0$.

6. Determine los valores de $m \in \mathbb{C}$ para los que la curva proyectiva C_m de ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 + m(x + y + z)^3 = 0$$

tiene al menos un punto singular. Para tales m, decida si C_m se descompone como unión de tres rectas.

7. Si $\alpha \neq 2, 3, 6$ entonces la curva proyectiva

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 + x^2y + y^2z + z^2x + \alpha xyz$$

es no singular.

8. Para cada $n > 0$ hay curvas en el plano proyectivo complejo no singulares y de grado n.

9. Sea F un polinomio homogéneo de grado d y sea $C = C(F) \subset \mathbb{P}^2(k)$ su lugar de ceros. Si $p = (a : b : c) \in C$ es un punto no singular y L es la ecuación de la recta tangente proyectiva a X en p, entonces la deshomogeneización L_* (respecto a la primera variable) es la ecuación de la recta tangente afín a F_* en el punto $(b/a, c/a)$ (suponiendo $a \neq 0$).

10. Una curva algebraica en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de grado d tiene un punto singular p de multiplicidad d si y sólo si consiste de d rectas por p.

11. Sea $g \in \mathbb{C}[X]$ de grado n y $f = Y - g(X) \in \mathbb{C}[X, Y]$, y sea $C = C(f) \subset \mathbb{C}^2$ la curva afín definida por f.

(a) Si $H_a = (y - a = 0)$ es una recta horizontal, el número total de intersecciones (contadas con multiplicidad) de X con H_a es igual a n.

(b) Si $V_a = (x - a = 0)$ es una recta vertical, el numero total de intersecciones $X \cap V_a$ es igual a 1. ¿Cómo se concilia esto con el teorema de Bezout ?

12. Toda curva algebraica en el plano proyectivo complejo de grado mayor o igual que tres tiene al menos un punto de inflexión. Por otro lado, ninguna cónica no singular tiene puntos de inflexión.

13. Si $m \in \mathbb{C}$, sea C_m la cúbica en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3mxyz = 0.$$

(a) La curva C_m es singular sii $m^3 + 1 = 0$.

(b) Cuando C_m es singular, se descompone como unión de tres rectas.

(c) Si α y β son las raíces de $t^3 + 1$ distintas de -1, los puntos de inflexión de C_m son $(0 : 1 : -1)$, $(-1 : 0 : 1)$, $(1 : -1 : 0)$, $(0 : 1 : \alpha)$, $(\alpha : 0 : 1)$, $(1 : \alpha : 0)$, $(0 : 1 : \beta)$, $(\beta : 0 : 1)$ y $(1 : \beta : 0)$.

14. Si $H_1, \ldots, H_m$ son hiperplanos de $\mathbb{P}^n$ y $m \leq n$, entonces $H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_m \neq \emptyset$. En particular, todo par de rectas distintas de $\mathbb{P}^2$ se cortan en un punto.

15. (a) Si P_1, P_2, P_3, P_4 y Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 son dos 4-uplas ordenadas de puntos de $\mathbb{P}^2$ tales que no hay tres en ninunga de ellas que estén alineados, existe un único isomorfismo proyectivo $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tal que $T(P_i) = Q_i$ para cada $i = \{1, 2, 3, 4\}$.

(*b*) Si L_1, L_2, L_3, L_4 y M_1, M_2, M_3, M_4 son dos 4-uplas de rectas de ¶^{2} tales que no hay tres en ninguna de las dos que incidan en el mismo punto, existe un único isomorfismo proyectivo $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tal que $T(L_i) = M_i$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

16. Un conjunto $C \subset \mathbb{P}^n(k)$ es una *cuádrica* si es el lugar de ceros de una forma $F \in k[X_0, \dots, X_n]_2$ no nula de grado 2.

(*a*) Si que $2 \neq 0$ en k, existe un isomorfismo proyectivo T tal que $C^T = V(G)$ con G de la forma $G = \sum_{i=0}^n a_i X_i^n$, $a_i \in k$.

(*b*) Si $k = \mathbb{R}$, existe un isomorfismo proyectivo T tal que $C^T = V(G_{r,p})$, con $G_{r,p}$ de la forma

$$G_{r,p} = \sum_{i=0}^{p} X_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} X_i^2,$$

para ciertos r y p con $0 \leq p \leq r \leq n$ y $r \leq 2p + 1$. El par (r, p) no depende de la elección de T.

(*c*) Si $k = \mathbb{C}$, existe un isomorfismo proyectivo T tal que $C^T = V(G_r)$, con G_r de la forma

$$G_r = \sum_{i=0}^{r} X_i^2,$$

para algún $r \in \{0, \dots, n\}$ independiente de la elección de T.

17. Sea $F \in k[X, Y]$ una forma no nula de grado n y sea $N \leq n$ el grado de F con respecto a la variable Y, de modo que $F = \sum_{i=0}^N a_i(X) Y^i$ con $a_i \in k[X]$ con $a_N \neq 0$.

Determine qué implicaciones son verdaderas entre las siguientes proposiciones:

(*i*) $N < n$;
(*ii*) $F_n(0, 1) = 0$, es decir, la direccion $(u, v) = (0, 1)$ es asintótica para F;
(*iii*) F no contiene el monomio Y^n;
(*iv*) F tiene una recta asintótica vertical;
(*v*) a_N no es constante.

18. Sea $F \in k[X, Y]$ una forma no nula de grado n. Existe una matriz inversible $A \in M_2(k)$ tal que $G(X, Y) = F((X, Y) \cdot A)$ contiene el monomio Y^n.

19. Sea $r \geq 2$.

(*a*) Un $T : \mathbb{P}^r(k) \to \mathbb{P}^r(k)$ isomorfismo proyectivo. induce un isomorfismo lineal $\tilde{T} : k[X_0, \dots, X_r]_n \to k[X_0, \dots, X_r]_n$ para todo $n \geq 0$.

(*b*) Si $F \in k[X_0, \dots, X_r]_n$, existe un isomorfismo proyectivo $T : \mathbb{P}^r(k) \to \mathbb{P}^r(k)$ tal que $\tilde{T}(F) = A_d + A_{d-1} X_0 + \cdots + A_0 X_0^n$ con $A_i \in k[X_1, \dots, X_r]_i$ y $A_0 \neq 0$.

(*c*) Si F, G son polinomios homogéneos de grado n y m, respectivamente, existe un T tal que

$$\tilde{T}(F) = A_n + A_{n-1} X_0 + \cdots + A_0 X_0^n,$$
$$\tilde{T}(G) = B_m + B_{m-1} X_0 + \cdots + B_0 X_0^m$$

con $A_i \in k[X_1, \dots, X_r]_i$ y $A_0 B_0 \neq 0$.

Julius Plücker
1801–1869, Alemania