Geometría Proyectiva

Segundo Cuatrimestre — 2011

Práctica 6: Curvas algebraicas afines

1. Grafique las curvas en $\mathbb{R}^2$ dadas por la ecuación $f(X,Y)=0$:

(a) $f = Y - X^2$
(b) $f = Y - X^3 + X$
(c) $f = Y^2 - X^3$
(d) $f = Y^2 - X^3 - X^2$
(e) $f = (X^2+Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$
(f) $f = (X^2+Y^2)^3 - 4X^2Y^2$
(g) $f = X^2 + X^3 + Y^2$
(h) $f = 2X^4 - 3X^2Y + Y^2 - 2Y^3 + Y^4$
(i) $f = X^4 + X^2Y^2 - 2X^2Y - XY^2 + Y^2$
(j) $f = X^6 - X^2Y^3 - Y^5$

2. Pruebe que las curvas planas definidas por los siguientes polinomios tienen a $p=(0,0)$ como único punto singular.

(a) $Y^2 - X^3$
(b) $Y^2 - X^3 - X^2$
(c) $(X^2+Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$
(d) $(X^2+Y^2)^3 - 4X^2Y^2$

3. Encuentre los puntos singulares y las rectas tangentes en ellos de cada una de las siguientes curvas:

(a) $Y^3 - Y^2 + X^3 - X^2 + 3Y^2X + 3X^2Y + 2XY$
(b) $X^4 + Y^4 - X^2Y^2$
(c) $X^3 + Y^3 - 3X^2 - 3Y^2 + 3XY + 1$
(d) $Y^2 + (X^2-5)(4X^4 - 20X^2 + 25)$

4. Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado, sea$f \in K[x,y]$ y sea p un punto singular de la curva afín $C(f)$ definida por f. Decimos que p es un *nodo* si f tiene multiplicidad dos en p y su forma inicial es producto de dos factores lineales distintos. Pruebe que p es un nodo si y sólo si tiene multiplicidad al menos dos en $C(f)$ y $f_{xy}^2(p) \neq f_{xx}(p) f_{yy}(p)$.

5. La curva en $\mathbb{R}^2$ definida en coordenadas polares por

$$r = 4a\cos^3 \tfrac{1}{3}\theta, \qquad -\tfrac{3}{2}\pi \leq \theta \leq \tfrac{3}{2}\pi$$

es una séxtica de ecuación

$$4(x^2+y^2-ax)^3 = 27a^2(x^2+y^2)^2.$$

Esta curva es conocida como la *séxtica de Cayley*.

6. La curva en $\mathbb{C}^2$ parametrizada por

$$\alpha(t) = (a \sin(nt + d), b \sin(t)), \qquad t \in \mathbb{C}$$

es llamada una curva de Lissajous.

(a) Muestre que si n es racional, entonces la curva es una curva algebraica.

(b) Haga gráficos para varios valores de a, b, n y d.

7. Para cada $d > 0$ hay curvas en el plano afín complejo que son irreducibles, no singulares y de grado d.

8. Sea $T : k^2 \to k^2$ una *aplicación polinómica*, esto es, una función $k^2 \to k^2$ tal que existen T_1, $T_2 \in k[X,Y]$ con $T(x,y) = (T_1(x,y), T_2(x,y))$ para todo $(x,y) \in k^2$. Si $f \in k[X,Y]$, definimos $f^T \in k[X,Y]$ poniendo

$$f^T(X,Y) = f(T_1(X,Y), T_2(X,Y))$$

y denotamos por $m_p(f)$ la multiplicidad de f en $p \in k^2$.

(a) Sea $q \in k^2$ y $p = T(q)$. Si la matriz jacobiana de T en q es inversible, entonces $m_q(f^T) = m_p(f)$.

(b) La implicación recíproca es falsa. Para verlo, considere la función tal que $T(X,Y) = (X^2, Y)$, el polinomio $f = Y - X^2$ y $p = q = (0,0)$.

9. Calcule las direcciones asintóticas y las asíntotas de las curvas algebraicas definidas por los siguientes polinomios:

(a) $X^2 - Y^2 - 1$

(b) $X^2 + Y^2 - 1$

(c) $Y - X^2$

(d) $Y^2 - X^2 + X^3$

(e) $Y^2 - X^3 + X$

(f) $X^n + Y^n - 1$

(g) $X^n - Y^m$

(h) $Y^2 - f(X)$, con $f \in k[X]$ de grado n.

10. (a) Si $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ son dos polinomios homogéneos de grado r y $r+1$, respectivamente, y sin factores comunes, entonces $f + g$ es irreducible.

(b) Dadas rectas $L_1, \dots, L_n$ incidentes en un punto P y enteros no negativos $r_1, \dots, r_n$, existen curvas irreducibles que pasan por P y tienen allí a cada L_i como recta tangente de multiplicidad r_i.

Sugerencia. Reduzca al caso en que P es el origen. Si para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, f_i es una ecuación de la recta L_i, considere un polinomio $f = \prod_{i=1}^n f_i^{r_i} + g$ con g un polinomio homogéneo de grado $1 + \sum_{i=1}^n r_i$ elegido de manera que f sea irreducible.

11. Si k es un cuerpo y $d \geq 0$, denotemos $k[X_1, \dots, X_n]_{\leq d} \subset k[X_1, \dots, X_n]$ al subespaqcio generado por los polinomios de grado menor o igual a d, y $k[X_1, \dots, X_n]_d$ a subespacio generado por los polinomios homogéneos de grado d o nulos.

(a) $k[X_1, \dots, X_n]_{\leq d}$ y $k[X_1, \dots, X_n]_d$ son subespacios vectoriales de $k[X_1, \dots, X_n]$. El conjunto de los monomios que tienen grado a lo sumo d es una base de $k[X_1, \dots, X_n]_{\leq d}$, y el conjunto de los monomios de grado d es una base de $k[X_1, \dots, X_n]_d$.

(*b*) Mostrar que

$$\dim k[X_1,\dots,X_n]_{\leq d} = \binom{n+d}{d}$$

y

$$\dim k[X_0,\dots,X_n]_d = \binom{n+d}{d}.$$

12. Si $f \neq 0$ en $f[X_1,\dots,X_n]$, entonces

$$f \in k[X_1,\dots,X_n]_d \iff f(tX_1,\cdots,tX_n) = t^d f(X_1,\cdots,X_n).$$

A la derecha, a igualdad es entre elementos de $k[t,X_1,\cdots,X_n]$.

13. Si $F \in k[X_1,\dots,X_n]_d$, entonces vale la "fórmula de Euler",

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial F}{\partial X_i} = dF.$$

14. (*a*) Si F, $G \in k[X_1,\dots,X_n]$ son polinomios homogéneos de grados r y s, respectivamente, entonces FG es homogéneo de grado $r+s$.

(*b*) Todo factor de un polinomio homogéneo es homogéneo.

15. *Homogeneización y deshomogeneización de polinomios.* Si $F \in k[X_0,\dots,X_n]_d$, sea $F_* \in k[X_1,\dots,X_n]_{\leq d}$ el polinomio

$$F_*(X_1,\dots,X_n) = F(1,X_1,\dots,X_n)$$

Si $f \in k[X_1,\dots,X_n]$ es un polinomio de grado d, sea $f^* \in k[X_0,\dots,X_n]_d$ dado por

$$f^*(X_0,\dots,X_n) = X_0^d f\Big(\frac{X_1}{X_0},\dots,\frac{X_n}{X_0}\Big).$$

(*a*) Si $F \in k[X_0,\dots,X_n]_d$ y $f \in k[X_1,\dots,X_n]$, encuentre expresiones explícitas para los coeficientes de F_* y de f^*.

(*b*) Si $F \in k[X_0,\dots,X_n]_d$ y $G \in k[X_0,\dots,X_n]_e$, y f, $g \in k[X_1,\dots,X_n]$, entonces $(FG)_* = F_*G_*$ y $(fg)^* = f^*g^*$.

(*c*) Si $f \in k[X_1,\dots,X_n]$, entonces $(f^*)_* = f$.

(*d*) Si $F \in k[X_0,\dots,X_n]_d$ y r es la mayor potencia de X_0 que divide a F, entonces $X^r(F_*)^* = F$.

(*e*) Si F, $G \in k[X_0,\dots,X_n]_d$ y f, $g \in k[X_1,\dots,X_n]$, entonces $(F+G)_* = F_* + G_*$ y $X_0^t(f+g)^* = X_0^e f^* + X_0^d g^*$, con $d = \operatorname{gr} f$, $e = \operatorname{gr} g$ y $t = d + e - \operatorname{gr}(f+g)$.

16. Sea $F \in k[X_0,\dots,X_n]_d$ un polinomio no divisible por X_0 y sea $f = F_*$, como en el ejercicio anterior.

(*a*) Los polinomios f y F tienen el mismo grado.

(*b*) Todo divisor no nulo de F es homogéneo.

(*c*) Hay una correspondencia biyectiva entre los divisores de F y los de f. En particular, F es irreducible si y sólo si f lo es.

17. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Si $F \in k[X,Y]_d$, entonces existen $a_1, \dots, a_d$, $b_1, \dots, b_d \in k$ tales que $(a_i,b_i) \neq (0,0)$ para todo $i \in \{1,\dots,n\}$ y

$$F(X,Y) = \prod_{i=1}^{d} (a_i X + b_i Y).$$

18. Si k un cuerpo infinito, entonces un polinomio $f \in k[X_1,\dots,X_n]$ tal que $f(a_0,\dots,a_n) = 0$ para todo $(a_1,\dots,a_n) \in k^n$ es nulo.

19. Sea A un dominio de integridad y sean $f, g \in A[X]$ dos polinomios de grado positivo, digamos

$$f = f_0 + f_1 X + \cdots + f_n X^n, \qquad g = g_0 + g_1 X + \cdots + g_m X^m$$

con f_n y g_m no nulos. La *resultante* de f y g es el determinante

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & \cdots & \cdots & f_n & & & \\ & f_0 & f_1 & \cdots & \cdots & \cdots & f_n & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & f_0 & f_1 & \cdots & \cdots & \cdots & f_n \\ g_0 & g_1 & \cdots & \cdots & g_m & & & & \\ & g_0 & g_1 & \cdots & \cdots & g_m & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & g_0 & g_1 & \cdots & \cdots & g_m \end{vmatrix};$$

notemos que se trata de una matrix $(m+n) \times (m+n)$.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f y g tienen un factor común de grado positivo.
(ii) Existen polinomios no nulos ϕ, $\psi \in A[X]$, de grados menores que n y que m, respectivamente, tales que $\psi f = \phi g$.
(iii) $R(f,g) = 0$.

20. Sea A un dominio de integridad. Si f, $g \in A[X]$, entonces existen p, $q \in A[X]$ tales que $R(f,g) = pf + qg$.

21. Sea k un cuerpo. Podemos pensar a los elementos de $k[X,Y]$ como elementos de $A[Y]$ con $A = k[X]$. Si f, $g \in k[X,Y]$, podemos entonces calcular la resultante de f y g *como polinomios en* Y: la notamos $R_Y(f,g) \in A$.

Enuncie los resultados del ejercicio **19** en este caso especial. En particular, pruebe que si k es algebraicamente cerrado y $a \in K$, entonces

$$R_Y(f,g)(a) = 0 \iff \exists b \in k : f(a,b) = g(a,b) = 0.$$

Generalice esto a la situación en que f, $g \in k[X_1,\dots,X_n] = k[X_1,\dots,X_{n-1}][X_n]$.

22. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y sean $f, g \in k[X_1,\cdots,X_n]$. Supongamos que f es irreducible.

(a) Se tiene que $C(f) \subseteq C(g)$ si y solamente si f divide a g.
(b) Si g también es irreducible y $C(f) = C(g)$, entonces $f = ug$ con $u \in k^\times$.
(c) Exhiba un contraejemplo de la última afirmación cuando el cuerpo de base no es algebraicamente cerrado.

23. Sean F, $G \in k[X_0,X_1,\dots,X_n]$ dos polinomios homogéneos de grado d y e, respectivamente.

Si $R = R_{X_0}(X_1,\dots,X_n)$ es la resultante de F y G con respecto de X_0, entonces R es un elemento de $k[X_1,\dots,X_n]$ homogéneo de grado de.

24. Si f, $g \in k[X]$ son polinomios mónicos con coeficientes en un cuerpo k, con factorizaciones $f = \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$ y $g = \prod_{j=i}^{m}(x-\beta_j)$ en $k[X]$, entonces

$$R(f,g) = u \prod_{1\leq i,j\leq n} (\alpha_i - \beta_j)$$

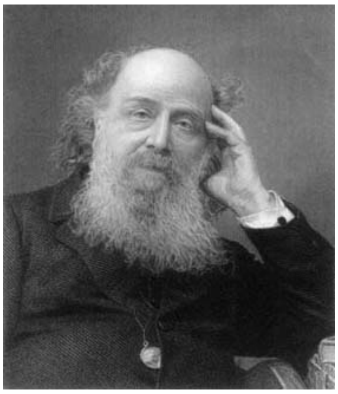
para algún $u \in k^{\times}$ que depende solamente de n y de m.

25. Sea A un dominio de integridad y sean f, $g \in A[X]$ dos polinomios mónicos. Sea $\varphi : A[X]/(g) \to A[X]/(g)$ el homomorfismo de A-módulos tal que $\varphi(\overline{h}) = \overline{fh}$ para todo $h \in A[X]$. Muestre que $\det(\varphi) = R(f,g)$; observe que como el A-módulo $A[X]/(g)$ es *libre*, esto tiene sentido.

26. Sea $f \in k[X,Y]$ un polinomio de grado d y sea $C = C(f)$ la curva afín plana que determina. Si L es una recta en k^2 que no está contenida en C, entonces el conjunto $L \cap C$ es finito y tiene a lo sumo d puntos.

27. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y sea $f \in k[X_1,\dots,X_n]$ un polinomio no constante. El conjunto $k^n \setminus C(f)$ es infinito si $n \geq 1$ y $C(f)$ es infinito si $n \geq 2$.

28. (a) Una curva plana irreducible posee un número finito de puntos singulares.
(b) ¿Es esto cierto para hipersuperficies en k^n, $n \geq 3$?



James Joseph Sylvester
1814–1897, Inglaterra

Sylvester introdujo la matriz descripta arriba para calcular la resultante de dos polinomios.