
GEOMETRÍA PROYECTIVA

Segundo Cuatrimestre — 2011

Práctica 5: Superficies

1. Calcule los coeficientes de la primera forma fundamental de las siguientes superficies paramétricas, en los puntos regulares.

(a) Elipsoide: $r(u, v) = (a \sin(u) \cos(v), b \sin(u) \sin(v), c \cos(u))$;

(b) Paraboloide elíptico: $r(u, v) = (au \cos(v), bu \sin(v), u^2)$;

(c) Paraboloide hiperbólico: $r(u, v) = (au \cosh(v), bu \sinh(v), u^2)$;

(d) Hiperboloide: $r(u, v) = (a \sinh(u) \cos(v), b \sinh(u) \sin(v), c \cosh(u))$.

2. Determine los coeficientes de la primera forma fundamental de la esfera S^2 en la parametrización dada por la proyección estereográfica.

3. Un cono sobre una curva plana y un plano son localmente isométricos.

4. Decimos que las curvas coordenadas de una parametrización $r(u, v)$ forman una *red de Tchebyshev* si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales. Una condición necesaria y suficiente para esto es que

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

Si las curvas coordenadas de una parametrización forman una red de Tchebyshev, entonces es posible reparametrizar el entorno coordenado de modo que los nuevos coeficientes de la primera forma fundamental sean

$$E = 1, \quad F = \cos \theta, \quad G = 1,$$

con θ es el ángulo entre las curvas coordenadas.

5. Toda superficie de revolución puede ser reparametrizada de manera que los coeficientes de la primera forma fundamental sean

$$E = E(v), \quad F = 0, \quad G = 1.$$

6. En un punto hiperbólico, las direcciones principales bisectan las direcciones asintóticas.

Sugerencia. Analizar la indicatriz de Dupin.

7. Si una superficie S es tangente a un plano P a lo largo de una curva $C \subset S$, entonces los puntos de C son puntos planares o parabólicos de S .

8. Describa las regiones de S^2 cubiertas por la aplicación de Gauss de las siguientes superficies:

(a) Paraboloide de revolución: $z = x^2 + y^2$;

(b) Hiperboloide de revolución: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$;

(c) Catenoide: $x^2 + y^2 = \cosh^2(z)$.

9. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son las curvaturas normales en un punto p de una superficie S en direcciones que forman ángulos de $0, 2\pi/m, \dots, 2(m-1)\pi/m$ respectivamente con una dirección principal x_i , entonces $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = mH$, con H la curvatura media en p .

Sugerencia. Use el teorema de Euler.

10. Encuentre expresiones para la primera y segunda forma fundamental, para la curvatura de Gauss y la media, y estudie las direcciones principales en

- (a) una superficie reglada, y
- (b) en una superficie dada en forma implícita $(x, y, z) = 0$.

11. Determine las curvas asintóticas y las líneas de curvatura de la superficie

$$z = xy.$$

12. (a) Determine una ecuación para la curva plana C que tiene la propiedad de que la longitud del segmento de la recta tangente entre el punto de tangencia y la intersección con una recta $L \subset \mathbb{R}^2$ que no corta la curva es constantemente 1. Esta curva es la *tractriz*.

- (b) Por rotación de la tractriz alrededor de la recta L se obtiene una superficie S , que llamamos *pseudoesfera*. Determine si S es una superficie regular y encuentre una parametrización en un entorno de un punto regular. Muestre que la curvatura de Gauss en todo tal punto es -1 .

13. Sean $\phi : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ y $\psi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones y supongamos que

$$r(u, v) = (\phi(v) \cos(u), \phi(v) \sin(u), \psi(v))$$

es una parametrización de una superficie de revolución con curvatura Gaussiana constante k . Supongamos además que $\phi'^2 + \psi'^2 = 1$. Muestre que entonces

$$\begin{aligned} \phi'' + k\phi &= 0, \\ \psi &= \int \sqrt{1 - \phi'^2} \, dv. \end{aligned}$$

Recíprocamente, muestre que para cada $k \in \mathbb{R}$ existe una superficie de revolución con curvatura de Gauss constante igual a k . ¿Cuántas hay?

14. Todas las superficies de revolución con curvatura constante $k = 1$ que intersecan perpendicularmente el plano xy están dadas por

$$\begin{cases} \phi(v) = C \cos v, \\ \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \sin^2 t} \, dt \end{cases}$$

para alguna constante C . Determine el dominio de v y haga un gráfico de la curva cortada en el plano xz cuando $C = 1$, $C > 1$ o $C < 1$. ¿Qué superficie obtenemos cuando $C = 1$?

15. Todas las superficies de revolución con curvatura constante $k = -1$ son de uno de los siguientes tipos:

$$\begin{cases} \phi(v) = C \cosh v, \\ \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \sinh^2 t} dt; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi(v) = C \sinh v, \\ \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \cosh^2 t} dt; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi(v) = e^v, \\ \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - e^{2t}} dt. \end{cases}$$

Determine el dominio de v y haga gráficos de las intersecciones de estas superficies con el plano xz .

16. Las únicas superficies de revolución con curvatura constante nula son el cilindro circular recto, el cono circular recto y el plano.

17. En la superficie obtenida por la rotación de la curva $y = x^2 - 1$ alrededor del eje x , los puntos que están sobre el plano yz son puntos planos.

18. Determine los puntos umbílicos del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Charles Dupin
1784–1873, Francia