Geometría Proyectiva

Segundo Cuatrimestre — 2011

Práctica 3: Cuádricas

1. Para cada una de las siguientes cónicas encuentre su forma afín, su forma ortogonal (tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{C}$), su centro, sus puntos singulares, y grafique en el sistema original de coordenadas (¡esto sólo en $\mathbb{R}^2$!).

(a) $x^2+y^2=1$;
(b) $x^2+y^2+2x-2y=-1$;
(c) $xy-x+3y=2$;
(d) $x^2-y^2+4x-2y=4$;
(e) $2x^2+xy-y^2=0$;
(f) $x^2+y^2-2x+4y=-5$.

2. Para cada una de las siguientes cónicas encuentre su forma afín, su forma ortogonal (tanto en $\mathbb{R}$ como en $\mathbb{C}$), su centro, sus puntos singulares. Si todavía está con ánimo grafique.

(a) $4x^2+4y^2+4z^2+2xy+2xz+2yz+6x-6z+5=0$;
(b) $4x^2+4y^2+4z^2+2xy+2xz+2yz+6x-6z+6=0$;
(c) $-4x^2+2yz-8x+2y-4=0$;
(d) $-4x^2+2yz-8x+2y-5=0$;
(e) $-4x^2+2yz-8x+2y-3=0$;
(f) $16x^2+24xy+9y^2+25z^2-16x-20y=0$;
(g) $16x^2+24xy+9y^2-25z^2-16x-20y=0$;
(h) $16x^2+24xy+9y^2-25z^2-16x-12y=0$.

3. Las secciones planas de un cono en $\mathbb{R}^3$ son cónicas. Interprete la clasificación de las cónicas en términos de la posición del plano utilizado para la sección.

4. Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^2$ y un número real a tal que $2a > d(p,q)$, sea

$$\mathscr{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,p)+d(x,q)=2a\}.$$

(a) El conjunto $\mathscr{X}$ es una elipse. Llamamos a p y a q sus focos.
(b) El punto medio entre los focos es el centro de la elipse.
(c) Toda elipse puede obtenerse por esta construcción.

5. Si $p, q \in \mathbb{R}^2$ y $a \in \mathbb{R}$ es tal que $0 < 2a < d(p,q)$, sea

$$\mathscr{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,p)-d(x,q)=2a\}.$$

Entonces el conjunto $\mathscr{X}$ es una hipérbola y toda hipérbola puede obtenerse de esta forma.

6. Si una elipse refleja los rayos de luz como un espejo plano, entonces un rayo emitido desde un foco pasa, luego de reflejarse, por el otro.

7. Si $p \in \mathbb{R}^2$ y $L \subset \mathbb{R}^2$ es una recta que no contiene a p, sea

$$\mathscr{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,p) = d(x,L)\}.$$

(a) El conjunto $\mathscr{X}$ es una parábola.

(b) Toda parábola se obtiene de esta forma.

(c) Llamamos a p el *foco* de la parábola y a la recta L es su *eje*. Una parábola que refleja la luz concentra los rayos de dirección perpendicular a su eje y provenientes del semiespacio que contiene al foco en este punto.

8. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ la cónica de ecuación cuadrática $F = 0$ y sea $p \in \mathbb{R}^2 - C$. Determine los puntos $x \in C$ tales que la recta tangente a C en x pasa por p.

9. (a) Demostrar que por cada punto del hiperboloide de una hoja de ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

pasan dos rectas contenidas en él.

(b) ¿Qué rectas (o variedades lineales) contienen las otras cuádricas?

¿?

Menecmo
ca. 380 – ca. 320 a.C., Grecia

A Menecmo se le atribuye el descubrimiento de las secciones cónicasy su primer estudio geométrico. Fue discípulo de Platón y de Eudoxo, y tutor de Alejandro Magno. A él se le atributen la famosa frase, dirigida a Alejandro, *«Rey, para viajar por el país hay caminos privados y caminos reales, pero en geomeria hay un único camino para todos»*.