

---

# GEOMETRÍA PROYECTIVA

## Segundo Cuatrimestre — 2011

### Práctica 2: Curvas en el espacio

---

1. Si una curva satisface una de las siguientes condiciones, es una recta:

- (a) Todas las tangentes a la curva inciden en un punto.
- (b) Todas las tangentes a la curva son paralelas entre sí.

2. Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva diferenciable y  $[a, b] \subset I$  un subintervalo cerrado de  $I$ . Para cada partición  $P = \{a = t_0 < t_1 \dots < t_n = b\}$  de  $[a, b]$ , consideremos la suma

$$l(\alpha, P) = \sum_{i=1}^n |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|$$

y notemos  $|P| = \max_{i=1, \dots, n} (t_i - t_{i-1})$  a la norma de  $P$ . Pruebe que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|P| < \delta \implies \left| \int_a^b |\alpha'(t)| dt - l(\alpha, P) \right| < \epsilon.$$

3. Dé condiciones suficientes para que el sistema

$$F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 0$$

determine una curva regular y determine su el vector tangente unitario.

4. Si  $\kappa$  es la curvatura de una curva  $\alpha$ , entonces su torsión es

$$\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{\kappa^2(s)}.$$

5. Las fórmulas de Frenet

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \kappa \mathbf{N} \\ \mathbf{N}' &= -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= -\tau \mathbf{N} \end{aligned}$$

pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \omega \times \mathbf{T} \\ \mathbf{N}' &= \omega \times \mathbf{N} \\ \mathbf{B}' &= \omega \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

con  $\omega = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}$ .

*Observación:* Cuando un cuerpo rígido (un trompo o una piedra, por ejemplo) gira alrededor de un punto existe un “eje instantáneo de rotación” que es el lugar de los puntos que están fijos es ese instante. Si pensamos en el triedro de Frenet fijo al cuerpo rígido, el eje instantáneo está dado por  $\omega$ .

6. Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva no necesariamente parametrizada por la longitud de arco y sea  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  una reparametrización de  $\alpha$  por la longitud de arco  $s = s(t)$  medido desde  $t_0 \in I$ . Sea  $t = t(s)$  la función inversa de  $s$  y denotemos  $\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'$ ,  $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \alpha''$  y  $\frac{d^3\alpha}{dt^3} = \alpha'''$ . Entonces

$$(a) \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\alpha'|} \text{ y } \frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{\langle \alpha', \alpha'' \rangle}{|\alpha'|^4};$$

$$(b) \quad \text{la curvatura de } \alpha \text{ en } t \text{ es } \kappa(t) = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3};$$

$$(c) \quad \text{la torsión de } \alpha \text{ en } t \text{ es } \tau(t) = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{|\alpha' \times \alpha''|^2}.$$

7. Calcule la curvatura y la torsión de las siguientes curvas en  $\mathbb{R}^3$ :

$$(a) \quad (u, u^2, y^3);$$

$$(b) \quad (u, \frac{1+u}{u}, \frac{1-u^2}{u});$$

$$(c) \quad (x, f(x), g(x));$$

$$(d) \quad (a(u - \sin(u)), a(u - \cos(u)), bu);$$

$$(e) \quad (a(3u - u^3), 3au^2, a(3u + u^3)).$$

8. Una función  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una *translación* si existe  $v \in \mathbb{R}^3$  tal que  $A(x) = x + v$  para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ . Una función lineal  $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una *transformación ortogonal* si  $\langle \rho(u), \rho(v) \rangle = \langle u, v \rangle$  para cada par de vectores  $u, v \in \mathbb{R}^3$ . Finalmente, una función  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un *movimiento rígido* si es la composición de una transformación ortogonal de determinante positivo y una translación.

(a) La norma de un vector y el ángulo entre dos vectores son preservados por transformaciones ortogonales de determinante positivo.

(b) El producto vectorial de dos vectores es *covariante*, de manera que

$$T(u) \times T(v) = T(u \times v)$$

si  $u, v \in \mathbb{R}^3$ , con respecto a transformaciones ortogonales  $T$  con determinante positivo. ¿Qué ocurre con las transformaciones ortogonales de determinante negativo?

(c) La longitud de arco, la curvatura y la torsión de una curva son invariantes por transformaciones rígidas.

9. Una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una *hélice* si existe una dirección con la cual todas sus tangentes forman un ángulo constante.

(a) Si  $\tau(s) \neq 0$  para todo  $s \in I$ , las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) la curva  $\alpha$  es una hélice;

(ii) el cociente  $\frac{\kappa}{\tau}$  es constante;

(iii) las rectas normales —aquellas que pasan por un punto de la curva con dirección dada por el vector normal— son todas paralelas a un plano fijo;

(iv) las rectas bonormales —aquellas que pasan por un punto de la curva con dirección dada por el vector binormal— son forman un ángulo constante con una dirección fija.

(b) Si  $s \in \mathbb{R}$  y  $a, b, c$  son tales que  $c^2 = a^2 + b^2$ , entonces la curva

$$\alpha(s) = (a \cos(\frac{s}{c}), a \sin(\frac{s}{c}), b \frac{s}{c})$$

es una hélice parametrizada por longitud de arco con  $\frac{\kappa}{\tau} = \frac{b}{a}$ .

10. Si  $2b^2 = 3a$ , la cúbica  $t \mapsto (at, at^2, t^3)$  es una hélice trazada sobre un cilindro de generatrices paralelas al plano  $xz$  y que forman un ángulo de  $\frac{\pi}{4}$  con el eje  $x$ . Encuentre la ecuación del cilindro.

11. Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva parametrizada por longitud de arco, la *indicatriz esférica* de  $\alpha$  es la curva  $\beta = T_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

(a) La curvatura de la indicatriz esférica de  $\alpha$  es  $\kappa_\beta = \frac{ds_\beta}{ds_\alpha}$ .

(b) Determine la indicatriz de una recta, de una hélice circular y de una curva plana.

(c) Si  $\alpha$  es plana y  $\theta$  es el ángulo entre un eje fijo y  $\beta$ , entonces  $\frac{ds_\beta}{ds_\alpha} = \frac{d\theta}{ds_\alpha} \mathbf{N}_\alpha$ . En particular, en esta situación se tiene que  $\kappa_\alpha = \frac{d\theta}{ds}$ .

12. La indicatriz esférica de una curva es una circunferencia si y sólo si la curva es una hélice.

13. La curva  $u \mapsto (a \sin^2(u), a \sin(u) \cos(u), a \cos(u))$  está sobre una esfera y todos sus planos normales pasan por el origen. Se trata de una curva cuártica.

14. Si  $\alpha$  una curva en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura y torsión nunca nulas, entonces  $\alpha$  está contenida en una esfera si y sólo si existe  $A \in \mathbb{R}$  tal que

$$R^2 + (R')^2 T^2 = A,$$

con  $R = \frac{1}{\kappa}$  y  $T = \frac{1}{\tau}$ .

15. Sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco, sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalo cerrado no trivial y sean  $p = \alpha(a)$  y  $q = \alpha(b)$ .

(a) Si  $v$  es un vector unitario  $v$ , entonces

$$(q - p) \cdot v = \int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

(b) En particular, si  $v = \frac{q-p}{|q-p|}$ , tenemos que

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

y, por lo tanto, la curva con menor longitud de arco que une los puntos  $p$  y  $q$  es la línea recta.

16. Sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por longitud de arco, con curvatura y torsión nunca nulas, sea  $s_0 \in \mathbb{R}$  y sea  $P$  un plano que satisface las siguientes condiciones:

- $P$  contiene la recta tangente en  $s_0$ , y
- para todo entorno  $I \subset \mathbb{R}$  de  $s_0$ , existen puntos de  $\alpha(I)$  a ambos lados de  $P$ .

Entonces  $P$  es el plano osculador de  $\alpha$  en  $s_0$ .

17. Una curva cuyos planos osculadores o bien pasan todos por un punto fijo, o bien son todos paralelos es plana.

18. Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular no necesariamente parametrizada por longitud de arco con curvatura y torsión nunca nulas. Decimos que  $\alpha$  es una *curva de Bertrand* si existe una curva  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que las rectas normales de  $\alpha$  y  $\beta$  en puntos correspondientes de  $I$  coinciden, y en ese caso  $\beta$  es la *compañera de Bertrand* de  $\alpha$  y puede escribirse en la forma

$$\beta(t) = \alpha(t) + rn(t).$$

- (a) En esa expresión para  $\beta$ ,  $r$  es constante.  
 (b)  $\alpha$  es una curva de Bertrand si y sólo si existe una relación lineal

$$A\kappa + B\tau = 1$$

con  $A$  y  $B$  constantes no nulas.

- (c) Si  $\alpha$  tiene más de una compañera de Bertrand, entonces tiene infinitas y esto ocurre si y sólo si  $\alpha$  es una hélice circular.



Joseph Alfred Serret  
 1819–1885, Francia

Serret fue el primero en obtener —en 1851— las ecuaciones que describen la variación del triedro fundamental de una curva; Jean Frédéric Frenet las había encontrado ya en 1847 en su tesis doctoral, pero su trabajo fue publicado recién en 1852. Aparte de sus contribuciones fundamentales en geometría diferencial, hizo aportes en teoría de números y mecánica. Fue el editor de los 14 volúmenes de las obras completas de Lagrange.