Geometría Proyectiva
Segundo Cuatrimestre — 2011
Segundo Parcial

Apellido y nombre: ....
L.U.: .... Hojas: ....

---

1. Encuentre los puntos de intersección de las curvas

$$y^2z - x(x-2z)(x+z) = 0, \qquad\qquad x^2 - 2xz + y^2 = 0$$

y determine la multiplicidad de intersección de cada uno de ellos.

Solución. Sea $(x : y : z)$ un punto de intersección. Si fuese $z = 0$, entonces las dos ecuaciones nos dicen que $x^3 = x^2 + y^2 = 0$, así que $x = y = 0$: esto es absurdo. Luego todos los puntos de intersección están en el complemento de la recta $z = 0$. Afinizando allí, las ecuaciones quedan

$$y^2 - x(x-2)(x+1) = 0, \qquad\qquad x^2 - 2x + y^2 = 0. \tag{1}$$

Restándolas, vemos que $4x - x^3 = 0$, así que $x \in \{0, \pm 2\}$. Es claro que si $x = 0$ debe ser $y = 0$. Si $x = 2$, las dos ecuaciones se reducen a $y^2 = 0$, así que también en este caso es $y = 0$. Finalmente, si $x = -2$, las ecuaciones se reducen a $y^2 + 8 = 0$, así que $y = \pm i2\sqrt{2}$. Concluimos de esta forma que los puntos de intersección son cuatro,

$$(0 : 0 : 1), \qquad (2 : 0 : 1), \qquad (-2 : \pm i2\sqrt{2} : 1).$$

Llamemos f_1 y g_1 a los miembros izquierdos de las ecuaciones (1). La multiplicidad de intersección en $(0 : 0 : 1)$ es

$$I(f_1, g_1) = I(f_1, g_1 + f_1) = I(2x + x^2 - x^3 + y^2, 2x^2 - x^3 + 2y^2) = 2 \cdot 1 = 2,$$

porque las formas iniciales de los polinomios $2x + x^2 - x^3 + y^2$ y $2x^2 - x^3 + 2y^2$ no tienen factores comunes.

Sean ahora $f_2 = -6x - 5x^2 - x^3 + y^2$ y $g_2 = 2x + x^2 + y^2$ los resultados de centrar a f_1 y a g_1 en el punto $(2, 0)$. La multiplicidad de intersección en $(2 : 0 : 1)$ es

$$I(f_2, g_2) = I(f_2 + 3g_2, g_2) = I(-2x^2 - x^3 + 4y^2, 2x + x^2 + y^2) = 2 \cdot 1$$

porque, otra vez, las formas iniciales de $-2x^2 - x^3 + 4y^2$ y de $2x + x^2 + y^2$ no tienen factores comunes.

Las curvas no tienen factores comunes —porque su intersección es finita— así que el teorema de Bezout nos dice que la multiplicidad de intersección total es 6. Es claro, entonces, que la multiplicidad de intersección en los puntos $(-2 : \pm i2\sqrt{2} : 1)$ debe ser 1. □

2. Una curva reducible en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tiene punto singulares.

Solución. Sugongamos que $F = 0$ es la ecuación de la curva C y que $F = fg$ con f y g dos polinomios homogéneos no constantes. El teorema de Bezout implica inmediatamente que f y g tienen ceros comunes en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Como

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x},$$

es claro que $\frac{\partial F}{\partial x}$ se anula en todo cero común de f y g, y lo mismo sucede con las otras derivadas parciales. Esto nos dice que los ceros comunes de f y g son puntos singulares de C. □

3. En toda superficie compacta de $\mathbb{R}^3$ hay un punto donde la curvatura es positiva.

Sugerencia. Si M es la superficie en cuestión, considere un punto $p \in M$ que está a distancia máxima del origen.

Solución. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie compacta. Sea $p \in M$ un punto donde la función $\phi : x \in M \mapsto \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ alcanza su máximo. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un entorno de $0 \in \mathbb{R}^2$ y sea $f : U \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de un entorno abierto de p en M tal que $f(0) = p$.

Como la función $x \in U \mapsto \frac{1}{2}\langle f(x), f(x) \rangle$ tiene un máximo local en 0, sus derivadas parciales se anulan allí, y entonces $\langle f_u(0), p \rangle = \langle f_v(0), p \rangle = 0$. Esto nos dice que p es un vector normal a M en p y, en consecuencia, $N = p/\|p\|$ es allí un vector normal unitario.

La función $\psi : x \in U \mapsto \langle f(x), N \rangle \in \mathbb{R}$ tiene un máximo estricto en $(0,0)$. Tiene un máximo porque $\langle f(x), N \rangle \leq \|f(x)\| \leq \|p\| = \langle f(0), N \rangle$ para todo $x \in U$; para ver que es estricto, supongamos que $x \in U$ es distinto de 0 y tal que $\langle f(x), N \rangle = \langle f(0), N \rangle$: entonces $f(x) = f(0) + (f(x) - f(0))$ y como $f(0) = \|f(0)\| N$ y $f(x) - f(0)$ son ortogonales por hipótesis, tenemos que $\|f(x)\|^2 = \|f(0)\|^2 + \|f(x) - f(0)\|^2 > \|f(0)\|^2$, lo que contradice la elección de p.

Sabemos entonces que el Hessiano de ψ es positivo en 0. Calculandolo, vemos que

$$\begin{vmatrix} \langle f_{uu}(0), N \rangle & \langle f_{uv}(0), N \rangle \\ \langle f_{vu}(0), N \rangle & \langle f_{vv}(0), N \rangle \end{vmatrix} > 0$$

Esta matrix tiene el mismo signo que la curvatura en p, así que concluimos de esta forma que la curvatura de M en p es positiva, como queríamos. □

4. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular, su superficie tangente es la parametrizada por la función $\phi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\phi(s,t) = \alpha(s) + t\alpha'(s).$$

Muestre que la superficie tangente a una curva es regular salvo a lo sumo sobre la curva original y que todos sus puntos son parabólicos.

5. Dos polinomios f, $g \in \mathbb{C}[X,Y]$ tienen un factor común no constante si y solamente si $Z(f,g) \subseteq \mathbb{C}^2$ es un conjunto infinito.

Sugerencia. Para probar la suficiencia, considere las resultantes $R_X(f,g)$ y $R_Y(f,g)$.

Solución. Supongamos primero que $h \in \mathbb{C}[X,Y]$ es un factor común no constante de f y g. Es claro que $Z(h) \subseteq Z(f,g)$, así que bastará probar que $Z(h)$ es infinito. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que h tiene grado $n > 0$ en Y, y escribamos $h = \sum_{i=0}^{n} h_i(X)Y^i$ con $h_0, \dots, h_n \in \mathbb{C}[X]$. Si $a \in \mathbb{C}$ es tal que $h_n(a) \neq 0$, entonces el polinomio $\sum_{i=0}^{n} h_i(a)Y^i \in \mathbb{C}[Y]$ tiene grado positivo, así que existe $b \in \mathbb{C}$ tal que $h(a,b) = \sum_{i=0}^{n} h_i(a)b^i = 0$. Esto nos dice que la imagen de $Z(h)$ por la primera proyección $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ contiene al conjunto $\{a \in \mathbb{C} : f_n(a) \neq 0\}$, que es infinito y prueba que $Z(h)$ mismo es infinito.

Recíprocamente, supongamos que $Z(f,g)$ es infinito. La imagen de $Z(f,g)$ bajo alguna de las dos proyecciones $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ debe ser infinita; sin pérdida de generalidad, podemos suponer que es la primera proyección. Existen entonces infinitos valores de $a \in \mathbb{C}$ tal que existe $b \in \mathbb{C}$ con $f(a,b) = g(a,b) = 0$ y para ellos se tiene $R_Y(f,g)(a) = 0$. El polinomio $R_Y(f,g) \in \mathbb{C}[X]$ tiene infinitas raíces, así que debe ser nulo. Sabemos que esto implica que f y g comparten un factor no constante en $\mathbb{C}[X,Y]$. $\square$