

GEOMETRÍA PROYECTIVA

Segundo Cuatrimestre — 2011

Primer Parcial

APELLIDO Y NOMBRE:
L.U.: HOJAS:

1. Sean α una curva regular en \mathbb{R}^2 cuya curvatura no se anula en ningún intervalo y sea $P \in \mathbb{R}^2$. Si todas las rectas tangentes a α están a la misma distancia de P , entonces α es un arco de circunferencia.

2. Una curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por longitud de arco cuya imagen está contenida en $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq r\}$ y tal que su curvatura es $|\kappa(t)| \leq 1/r$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es una circunferencia de radio r .

Sugerencia. Muestre que una función diferenciable $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ acotada superiormente y con derivada segunda no negativa es constante y considere entonces la función $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \|\alpha(t)\|^2 \in \mathbb{R}$.

3. Determine las formas normales general afín real, general afín compleja y ortogonal de la cuádrlica

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 6x - 6z + 5 = 0.$$

4. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, sea $t_0 \in I$ y sea $a \in \mathbb{R}$ un escalar no nulo.

(a) Si $g : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función diferenciable tal que $\|g\| = 1$ y $\det(g, g', g'') \neq 0$, y definimos $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de manera que

$$\alpha(t) = a \int_{t_0}^t g(\xi) \wedge g'(\xi) \, d\xi \tag{1}$$

para todo $t \in I$, entonces α es una curva regular con curvatura nunca nula y torsión constante $\tau = 1/a$.

(b) Recíprocamente, si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada por longitud de arco con curvatura nunca nula y torsión constante $\tau = 1/a$ y que pasa por el origen, existe una función $g : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\|g\| = 1$ y $\det(g, g', g'') \neq 0$, y para la cual vale la relación (1) para todo $t \in I$.

Sugerencia. Recuerde que si $u, v, x, y \in \mathbb{R}^3$, entonces $(u \wedge v) \wedge (x \wedge y) = \det(u, v, y)x - \det(u, v, x)y$.

5. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad de dimensión k y sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Llamemos $g = f|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ a la restricción de f a M . Si en $p \in M$ la función g tiene un máximo local relativo, de manera que existe $r > 0$ tal que

$$x \in M \cap B_r(p) \implies g(x) \leq g(p),$$

entonces la aplicación diferencial $g'(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ es nula.