Geometría Proyectiva

Segundo Cuatrimestre — 2011

Primer Parcial

Apellido y nombre: ....

L.U.: .... Hojas: ....

---

1. Sean α una curva regular en $\mathbb{R}^2$ cuya curvatura no se anula en ningún intervalo y sea $P \in \mathbb{R}^2$. Si todas las rectas tangentes a α están a la misma distancia de P, entonces α es un arco de circunferencia.

Solución. Podemos suponer que la curva está parametrizada por longitud de arco y que el punto P es el origen. Sea I el intervalo de $\mathbb{R}$ donde α está definida.

Si $t \in I$, la recta tangente a α en $\alpha(t)$ tiene ecuación

$$\langle N(t), x\rangle = \langle N(t), \alpha(t)\rangle,$$

Como $N(t)$ es un vector unitario, la distancia de esta recta al origen es $|\langle N(t), \alpha(t)\rangle|$ y, por hipótesis, es igual a una constante c. Como $\langle N, \alpha\rangle$ es una función continua, esto implica que es ella misma constante y derivándola vemos que

$$0 = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle N, \alpha\rangle = \langle -\kappa T, \alpha\rangle + \langle N, T\rangle = -\kappa\langle T, \alpha\rangle.$$

Como κ no se anula en ningún intervalo y $\langle T, \alpha\rangle$ es una función continua, esto implica que $\langle T, \alpha\rangle = 0$ idénticamente. Pero entonces

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\alpha\|^2 = 2\langle T, \alpha\rangle = 0,$$

así que $\|\alpha\|$ es constante, esto es, la imagen de α está contenida en una circunferencia centrada en el origen. □

2. Una curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ parametrizada por longitud de arco cuya imagen está contenida en $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq r\}$ y tal que su curvatura es $|\kappa(t)| \leq 1/r$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es una circunferencia de radio r.

Sugerencia. Muestre que una función diferenciable $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada superiormente y con derivada segunda no negativa es constante y considere entonces la función $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \|\alpha(t)\|^2 \in \mathbb{R}$.

Solución. La función $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}\langle \alpha(t), \alpha(t)\rangle \in \mathbb{R}$ es claramente diferenciable, y es $f' = \langle T, \alpha\rangle$ y $f'' = \kappa\langle N, \alpha\rangle + 1$. Como $|\kappa| \leq 1/r$ y $|\langle N, \alpha\rangle| \leq \|N\|\,\|\alpha\| \leq r$, es $\kappa\langle N, \alpha\rangle \geq -1$ y entonces $f'' \geq 0$. Para terminar, bastará probar que

una función diferenciable $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada superiormente y con derivada segunda no negativa es constante. (1)

En efecto, sabiendo esto podremos concluir que f es constante, esto es, que α tiene imagen contenida en una circunferencia centrada en el origen. Si r' es su radio, entonces $r' \leq r$, porque la imagen de α está contenida en el disco de radio r y, por otro lado, la curvatura de α es $1/r'$ no supera a $1/r$, así que $r' \geq r$. En definitiva, $r' = r$.

Sea ϕ una función como en (1) y sea M una cota superior para ϕ. La hipótesis implica que ϕ' es no decreciente.

- Supongamos que existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $\phi'(A) > 0$. En ese caso $\phi'(t) \geq \phi'(A)$ para todo $t \geq A$ y el teorema del valor medio implica que para cada $u \geq 0$ existe $\xi_u \in [A, A+u]$ tal que

$$M - \phi(A) \geq \phi(A+u) - \phi(A) = u\phi'(\xi_u) \geq u\phi'(A).$$

  Esto es absurdo, y entonces ϕ' es no positiva.
- La función $\psi : t \in \mathbb{R} \mapsto \phi(-t) \in \mathbb{R}$ es acotada superiormente y tiene derivada segunda no negativa, así que, de acuerdo a lo ya hecho, su derivada es no positiva. Esto nos dice, precisamente, que la derivada de ϕ es no negativa.

Concluimos así que ϕ' es idénticamente nula y, en consecuencia, que ϕ es constante. □

3. Determine las formas normales general afín real, general afin compleja y ortogonal de la cuádrica

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 6x - 6z + 5 = 0.$$

Solución. Llamemos F al polinomio que define la cuádrica. El sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 4x + 2y + 2z + 6 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 4y + 2z = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2x + 2y + 4z - 6 = 0 \end{cases}$$

tiene a $P = (-3, 0, 3)$ como única solución. Ese punto es el único centro de la cuádrica, y el valor de F en P es -13. La matriz de coeficientes de la parte cuadrática de F es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

que tiene polinomio característico $\chi = t^3 - 6t^2 + 9t - 4$, con raices 1, 1 y 4. Esto implica que F es ortogonalmente equivalente a

$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 13 = 0,$$

así que su forma normal ortogonal es

$$\tfrac{1}{13}x^2 + \tfrac{1}{13}y^2 + \tfrac{4}{13}z^2 - 1 = 0.$$

Como los coeficientes que aparecem aquí son positivos, sabemos que la forma normal general afín real de F es

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

y que ésta concide con la forma normal general afín compleja. □

4. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, sea $t_0 \in I$ y sea $a \in \mathbb{R}$ un escalar no nulo.

(a) Si $g : I \to \mathbb{R}^3$ es una función diferenciable tal que $\|g\| = 1$ y $\det(g, g', g'') \neq 0$, y definimos $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ de manera que

$$\alpha(t) = a \int_{t_0}^{t} g(\xi) \wedge g'(\xi)\, \mathrm{d}\xi \tag{2}$$

para todo $t \in I$, entonces α es una curva regular con curvatura nunca nula y torsión constante $\tau = 1/a$.

(b) Recíprocamente, si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada por longitud de arco con curvatura nunca nula y torsión constante $\tau = 1/a$ y que pasa por el origen, existe una función $g : I \to \mathbb{R}^3$ tal que $\|g\| = 1$ y $\det(g, g', g'') \neq 0$, y para la cual vale la relación (2) para todo $t \in I$.

Sugerencia. Recuerde que si $u, v, x, y \in \mathbb{R}^3$, entonces $(u \wedge v) \wedge (x \wedge y) = \det(u, v, y)x - \det(u, v, x)y$.

Solución. Recordemos de la práctica 2 que si β es una curva regular no necesariamente parametrizada por longitud de arco, su curvatura y su torsión están dadas por las fórmulas

$$\kappa = \frac{\|\beta' \wedge \beta''\|}{\|\beta'\|^3}, \qquad \tau = \frac{\det(\beta', \beta'', \beta''')}{\|\beta' \wedge \beta''\|^2}.$$

(a) Es

$$\begin{aligned}
\alpha' &= a g \wedge g', \\
\alpha'' &= a g' \wedge g' + a g \wedge g'' = a g \wedge g'', \\
\alpha''' &= a g' \wedge g'' + a g \wedge g'''.
\end{aligned}$$

Como $\|g\| = 1$, g y g' son siempre ortogonales; como $\det(g, g', g'') \neq 0$, $g' \neq 0$. Usando esto, vemos que

$$\|\alpha'\| = |a|\,\|g \wedge g'\| = |a|\,\|g\|\,\|g'\| = |a|\,\|g'\|$$

no se anula nunca, así que α es una curva regular. Es

$$\begin{aligned}
\alpha' \wedge \alpha'' &= (a g \wedge g') \wedge a g \wedge g'' \\
&= a^2(\det(g, g', g'')g - \det(g, g', g)g'') \\
&= a^2 \det(g, g', g'')g,
\end{aligned}$$

así que

$$\|\alpha' \wedge \alpha''\| = a^2\,|\det(g, g', g'')|$$

y

$$\kappa = \frac{a^2\,|\det(g, g', g'')|}{|a|^3\,\|g'\|^3} \neq 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') &= \left\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \right\rangle \\
&= \left\langle (a g \wedge g') \wedge (a g \wedge g''), a g' \wedge g'' + a g \wedge g''' \right\rangle \\
&= a^3 \left\langle (g \wedge g') \wedge (g \wedge g''), g' \wedge g'' + g \wedge g''' \right\rangle \\
&= a^3 \left\langle \det(g, g', g'')g - \det(g, g', g)g'', g' \wedge g'' + g \wedge g''' \right\rangle \\
&= a^3 \left\langle \det(g, g', g'')g, g' \wedge g'' + g \wedge g''' \right\rangle \\
&= a^3 \left\langle \det(g, g', g'')g, g' \wedge g'' \right\rangle \\
&= a^3 \det(g, g', g'')^2,
\end{aligned}$$

de manera que

$$\tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} = \frac{a^3 \det(g, g', g'')^2}{a^4 \, |\det(g, g', g'')|^2} = \frac{1}{a}.$$

(b) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}$ una curva parametrizada por longitud de arco con curvatura nunca nula y torsión constante $\tau = 1/a$, y sea $t_0 \in I$ tal que $\alpha(t_0) = 0$. Sea $g = B : I \to \mathbb{R}^3$ el campo de vectores binomales a α y sea $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ la curva tal que

$$\beta(t) = a \int_{t_0}^{t} B(\xi) \wedge B'(\xi) \, d\xi.$$

Entonces

$$\beta' = aB \wedge B' = aB \wedge (-\tau N) = -a\tau B \wedge N = T = \alpha',$$

así que la diferencia $\beta - \alpha$ es constante. Como esta diferencia se anula en t_0, vemos que, de hecho, $\beta = \alpha$.

5. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad de dimensión k y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Llamemos $g = f|_M : M \to \mathbb{R}$ a la restricción de f a M. Si en $p \in M$ la función g tiene un máximo local relativo, de manera que existe $r > 0$ tal que

$$x \in M \cap B_r(p) \implies g(x) \leq g(p),$$

entonces la aplicación diferencial $g'(p) : T_pM \to \mathbb{R}$ es nula.

Solución. Sea $v \in T_pM$. Existen $\varepsilon > 0$ y una curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen está contenida en M y tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Como α es continua y $B_r(p)$ es un entorno de p, existe η tal que $0 < \eta < \varepsilon$ y $\alpha(t) \in B_r(p)$ para todo $t \in (-\eta, \eta)$. Esto implica que la función $g \circ \alpha : (-\eta, \eta) \to \mathbb{R}$ tiene un máximo local en 0 y, como es diferenciable, que en consecuencia $(g \circ \alpha)'(0) = 0$. Pero entonces

$$g'(p)(v) = \left.\frac{d(g \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Como esto es así cualquiera sea $v \in T_pM$, concluimos que $g'(p) = 0$. □